

**LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MODÉLISATION DES MILIEUX
CONDENSÉS**

Thèse

présentée par

Nicolas TRÉGOURÈS

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Physique**

**Approche mésoscopique des ondes en milieu complexe :
des micro-ondes aux ondes sismiques**

Date de soutenance : 24 septembre 2001

Composition du jury :

M. C. Vanneste	rapporteur	Directeur de Recherche, CNRS LPMC
M. D. Gibert	rapporteur	Professeur, Université de Rennes
M. R. Maynard	Président du jury	Professeur, Université Grenoble I
M. B. van Tiggelen	directeur de thèse	Chargé de Recherche, CNRS LPMC
M. M. Campillo	codirecteur de thèse	Professeur, Université Grenoble I

Remerciements

Ce travail de thèse doit beaucoup à Bart van Tiggelen. Par le sujet bien évidemment, la diffusion multiple des ondes en milieu complexe, mais surtout par l'approche des phénomènes étudiés. On pourrait penser, en feuilletant cette thèse, qu'elle est un recueil illisible de physique théorique avec de larges passages extrêmement mathématiques. La réalité est toute autre. Les motivations de ce travail sont liées à des phénomènes expérimentaux couramment observés pour lesquels il n'existait pas réellement de théorie. Aussi mes premiers remerciements vont à Bart pour m'avoir fait comprendre que les expressions mathématiques en physique théorique sont, riches de sens physique, servent à décrire des phénomènes naturels et ne s'opposent pas à la physique expérimentale, bien au contraire.

Je tiens particulièrement à remercier Michel Campillo pour avoir accepté de codiriger ce travail de thèse ainsi que pour m'avoir initié aux phénomènes fascinants que l'on observe en sismologie.

Un immense merci à Renaud Hennino, Céline Lacombe et Ludovic Margerin pour les trois agréables années passées à discuter de sismologie. Une grande partie des questions posées et des réponses proposées l'ont été lors de discussions collectives. Grâce à eux, l'ambiance de travail a été très agréable et hautement constructive.

Je remercie vivement les membres du jury pour avoir pris le temps de lire le mémoire et pour avoir assisté à la présentation orale. Je remercie tout particulièrement Roger Maynard d'avoir été le président du jury ainsi que Christian Vanneste et Dominique Gibert d'avoir accepté le rôle de rapporteur (merci Christian pour tes commentaires constructifs et particulièrement pertinents sur le manuscrit).

Un grand merci à Alexis Dauchy, pour avoir accepté de relire intégralement le manuscrit, mais surtout pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur divers sujets.

Un merci tout particulier aux membres (présents et passés) du LPMMC, Françoise Berthoud, Gérard Jomard, Cécile Berne, David Lacoste, Philippe Peyla, Alain Pasturel, Frédéric Faure, Andrei Incze, Eric Larose, Raffaello Ferone, Johann Bouchet, Frank Hekking, Michel Peretto, Felipe Arruda de Araújo Pinheiro, Sergei Skipetrov, Norbert Kern, Daniel Garrivier et Richard Bressoux.

Enfin, parmi les personnes susceptibles de se trouver sur cette page, Jong-Mi et mes parents sont au-dessus de tous remerciements.

Table des matières

I	Transport de la lumière à travers un milieu hétérogène	5
1	Introduction	7
1.1	Présentation	7
1.2	Les longueurs caractéristiques	9
1.3	Le régime mésoscopique de faible désordre	10
1.4	Plan de la première partie	12
2	Propagation cohérente d'une onde acoustique	17
2.1	Introduction	17
2.2	Transmission, corrélations et fluctuations : définitions	18
2.2.1	La fonction de corrélation $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$	20
2.3	Calcul de la fonction de corrélation $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$	21
2.3.1	Intensité diffuse	22
2.3.2	Coefficient de transmission et conductance	25
2.3.3	Calcul de $C^{(1)}$	26
2.3.4	Calcul de $C^{(2)}$	27
2.3.5	Calcul de $C^{(3)}$	30
2.4	Résumé et interprétation physique	33
2.4.1	Interprétation physique des termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$	33
2.5	Influence de l'absorption	35
2.5.1	Transmission et conductance	36
2.5.2	$C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ en présence d'absorption	36
2.6	Conclusions	39

3	Transport d'une onde électromagnétique	43
3.1	Introduction	43
3.2	Fonction de corrélation de l'intensité transmise	44
3.3	Propagation d'une onde électromagnétique	46
3.3.1	Fonction de Green moyenne	47
3.3.2	Propagateur de l'intensité diffuse	48
3.3.3	Coefficients de transmission et conductance	50
3.3.4	Fonction de corrélation $C^{(1)}$	50
3.3.5	Fonction de corrélation $C^{(2)}$	51
3.3.6	Fonction de corrélation $C^{(3)}$	54
3.4	Bilan des sections précédentes	57
3.4.1	Interprétation physique	57
3.5	Influence de l'absorption	58
3.6	Comparaison avec l'expérience	59
3.7	Conclusion	63
A	Calcul du vertex de Hikami $H^{(4)}$	65
2	Bilan et perspectives	71
II	La mésoscopie des ondes sismiques	75
1	La Coda sismique vue par un physicien	77
1.1	Introduction	77
1.2	La structure interne de la terre	78
1.3	Equation d'onde élastique	79
1.3.1	Conversions de modes par réflexion aux interfaces	82
1.4	Les différents types d'enregistrements sismiques	87
1.5	La Coda sismique : une signature du désordre?	89
1.5.1	Atténuation d'une onde cohérente scalaire par diffusion	90
1.5.2	Conversions de modes par diffusion	92
1.6	Premier modèle : milieu semi-infini absorbant	95
1.7	Deuxième modèle : diffusion dans la croûte et fuite au Moho	96
1.8	Equipartition de l'énergie	99
1.8.1	Equipartition pour un milieu élastique infini	99

1.8.2	Dénombrément dans l'espace réciproque	100
1.8.3	Méthode générale	101
1.9	Plan de la deuxième partie	103
2	Equation de diffusion vectorielle	109
2.1	Introduction	110
2.2	Diffusion approximation for elastic polarization.	111
2.2.1	Derivation of the generalized diffusion equation.	113
2.2.2	Conventional diffusion equation.	116
2.3	Finite media and boundary conditions.	117
2.3.1	Free surface.	119
2.4	Time-dependent solution for the unbounded medium.	120
2.4.1	Role of dissipation.	122
2.5	Solution for a half-space with a free surface boundary condition.	123
2.6	Solution for a slab.	125
2.7	Conclusions.	128
3	Transport d'ondes élastiques	133
3.1	Introduction	134
3.2	A Schrödinger-type equation for Elastic Waves	136
3.3	Propagation of Elastic Waves in a Layer	138
3.3.1	Eigenmodes of a homogeneous elastic plate	139
3.3.2	Extinction time of the eigenmodes Ψ_n	140
3.4	Transport Equation in a Layer	144
3.4.1	Equipartitioned solution	145
3.4.2	Dynamics of the Equipartition Process	146
3.5	Diffusion Approximation	148
3.6	Coherent Backscattering near the Free Surface	153
3.6.1	Monopolar source at depth	155
3.6.2	Isotropic Explosion	156
3.6.3	Dipolar Source	157
3.6.4	Double-couple source at depth	159
3.7	Conclusions and Outlook	161
4	Observation de l'équipartition des ondes sismiques	167

Première partie

Transport de la lumière à travers un milieu hétérogène

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation

La propagation d'une onde à travers un milieu désordonné est un phénomène bien connu que l'on retrouve dans de nombreux domaines. En astrophysique, par exemple, dans le cadre de la propagation d'ondes électromagnétiques à travers des gaz interstellaires ou les atmosphères solaires et planétaires, en sismologie avec la propagation d'ondes sismiques dans la terre, lors de la conduction des électrons dans les métaux, mais aussi en imagerie médicale lors de la propagation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques à travers les tissus humains, ou bien plus simplement, en regardant le soleil par un jour nuageux. Toutes ces disciplines semblent très éloignées les unes des autres du fait de leurs échelles respectives (du nanomètre pour l'optique aux kilomètres pour la sismologie) et par leurs problématiques, mais sont confrontées au même problème ; à savoir comprendre comment se propage une onde à travers un nombre plus ou moins grand d'obstacles répartis de façon aléatoire.

Le degré d'hétérogénéité du milieu est une donnée fondamentale car il détermine la nature des phénomènes physiques observés. Par exemple, dans un bar très enfumé, la lumière des spots lumineux n'est pas multiples fois diffusée. Il est toujours possible de suivre la direction de la lumière qui trace des chemins rectilignes. On dit que l'on est dans un régime de diffusion simple. Par contre, par un jour de très fort brouillard, le ciel apparaît uniformément lumineux, même en regardant dans la direction du soleil; ou de nuit, les phares des voitures créent des halos lumineux et ne donnent pas naissance à des faisceaux rectilignes comme les spots du bar. Dans ces situations nous sommes en présence

de diffusion multiple. La lumière a été diffusée de nombreuses fois et a complètement perdu la mémoire de sa direction initiale avant de nous parvenir.

En fonction des disciplines, l'étude de la propagation d'une onde à travers un milieu désordonné a pour but de répondre à des questions différentes. Cependant on peut les classer généralement selon trois problématiques.

1. Comment déterminer les caractéristiques physiques d'une onde incidente sur un milieu hétérogène à partir de son onde transmise? C'est le problème auquel sont confrontés les astrophysiciens. Par exemple, la lumière émise par les étoiles est altérée par les nuages intergalactiques et les atmosphères solaire et planétaire. Le but est alors de "remonter" aux propriétés de la lumière incidente à partir des observations [1].
2. Résoudre le problème inverse, c'est-à-dire déterminer les caractéristiques du milieu à partir de la détection des ondes diffuses. La propagation de l'onde dans le milieu hétérogène a alors un but d'imagerie. C'est la problématique de l'imagerie médicale mais aussi de la sismologie. En utilisant des propriétés des champs diffus, Vidale *et al* [2, 3] auraient mis en évidence une super rotation du noyau interne de la terre: le noyau interne de la terre tournerait légèrement plus vite que la partie externe de la terre.
3. Résoudre le problème direct, c'est-à-dire déterminer les propriétés de transport d'une onde à travers un milieu hétérogène. C'est la question qui se pose lors de la propagation d'électrons à travers les métaux ou de la lumière à travers des milieux hétérogènes par exemple. Il s'agit alors de déterminer les propriétés statistiques de propagation telle que la conductance, les fluctuations de conductance [4], etc. La thématique de la propagation des électrons dans des systèmes désordonnés est très dynamique car, pour de petits systèmes à basse température, les électrons gardent une cohérence quantique, ce qui fait de la propagation des électrons dans les métaux un problème ondulatoire quantique très riche. De plus, il existe de nombreuses analogies entre la propagation des électrons et des ondes électromagnétiques. C'est d'ailleurs une des motivations de cette première partie de thèse.

Mais avant de poursuivre il est utile d'introduire quatre longueurs caractéristiques qui sont fondamentales pour comprendre la propagation des ondes dans des milieux désordonnés.

1.2 Les longueurs caractéristiques

La propagation d'une onde dans un milieu désordonné introduit cinq longueurs caractéristiques : la longueur d'onde λ , la longueur d'extinction (souvent appelée le libre parcours moyen) l , le libre parcours moyen de transport l^* , la longueur de cohérence L_ϕ pour les ondes quantiques ou la longueur d'absorption L_a pour les ondes classiques et enfin la taille du système L .

La longueur d'extinction l représente la distance caractéristique sur laquelle le champ cohérent, u_{coh} , décroît d'un facteur e . On peut facilement montrer que la longueur d'extinction l correspond à la distance moyenne entre deux diffusions de l'onde sur les hétérogénéités du milieu. La longueur d'extinction est donnée par la relation $l = 1/n\Sigma$, où n est la densité de diffuseurs et Σ la section efficace totale des diffuseurs [1, 5]. Le libre parcours moyen de transport l^* représente, quant à lui, la distance moyenne nécessaire pour qu'une onde perde la mémoire de sa direction initiale. Pour des diffuseurs qui ont des sections efficaces différentielles très piquées vers l'avant, l^* peut être beaucoup plus grand que la longueur d'extinction l . A l'inverse, pour des diffuseurs à sections efficaces isotropes le libre parcours moyen de transport et la longueur d'extinction coïncident, $l^* = l$. On montre que $l^* = l / \langle 1 - \cos \theta \rangle$, où $\langle \dots \rangle$ dénote la moyenne sur la fonction de phase de la section efficace différentielle [1, 5].

La longueur de cohérence L_ϕ , propre aux systèmes quantiques, décrit la longueur pour laquelle la fonction d'onde garde sa cohérence de phase. Pour des distances supérieures à L_ϕ , la phase de la fonction d'onde est irrémédiablement détruite par des processus inélastiques comme les interactions electron-phonon, et les effets d'interférences quantiques disparaissent. La longueur de cohérence L_ϕ dépend fortement de la température et est typiquement de l'ordre du micro-mètre pour les électrons à très basse température.

La propagation d'ondes classiques se fait généralement de façon cohérente (une exception est la propagation de la lumière dans les gaz atomiques où l'effet Doppler détruit la cohérence de phase des ondes) mais est limitée par l'atténuation. La longueur d'absorption est donnée par $L_a = \sqrt{D\tau_a}$ où D est la constante de diffusion du milieu et τ_a le temps d'absorption. Pour un système où $L > L_a$ les ondes sont significativement absorbées.

Les phénomènes physiques sont totalement différents suivant les inégalités entre les quatre longueurs λ , l^* , L et $L_{\phi,a}$. Cela nous conduit à cinq régimes différents [6].

1. Si $\lambda \ll L_{\phi,a} < l^* < L$, les ondes quantiques se comportent comme des particules car avant chaque diffusion l'aspect ondulatoire de la fonction d'onde est perdu. Ce régime est identique à celui du *transport de particules*. Il a été étudié au début du

siècle et porte aussi le nom de *transfert radiatif* “classique”.

2. Si $\lambda \ll l^* \ll L_{\phi,a} \ll L$, les effets d’interférences quantiques sont possibles mais très atténués. La manifestation de ce régime intervient par des quantités de transport dépendantes explicitement de la longueur de cohérence L_ϕ [6].
3. Si $\lambda \ll l^* \ll L \ll L_{\phi,a}$, nous sommes dans le régime dit *mésoscopique de faible désordre*. La propagation de l’onde est cohérente et de multiples diffusions ont lieu. C’est le régime de la localisation faible, du cône de rétrodiffusion cohérente [7] et des fluctuations universelles de conductance [8]. Il a été particulièrement étudié dans les vingt dernières années.
4. Si $\lambda \approx l^* \ll L \ll L_{\phi,a}$, nous sommes dans le régime dit *mésoscopique de fort désordre*. C’est probablement le régime le plus compliqué et le plus riche. Il donne lieu à la localisation forte d’Anderson [9] (prédite théoriquement en 1958), qui stipule que la propagation d’une onde dans un milieu très fortement désordonné est impossible.
5. $\lambda \ll L < l^*, L_{\phi,a}$. C’est le régime *ballistique* qui est bien connu en électromagnétisme [10] et lors de la propagation certaines ondes sismiques [11]. Le désordre n’entre pas en jeu lors de la propagation.

Chacun de ces cinq régimes est un champ d’études en lui-même. Le régime sur lequel nous allons nous concentrer est le régime *mésoscopique de faible désordre*, c’est-à-dire le régime trois.

1.3 Le régime mésoscopique de faible désordre

Les propriétés de transport des systèmes mésoscopiques faiblement désordonnés sont très particulières. Supposons que l’on désire évaluer le transport de l’intensité d’un point A à un point B . A chaque chemin i est associé un champ partiel u_i (figure 1.1). L’intensité au point B est donc

$$I(A \rightarrow B) = \sum_{i,j} u_i u_j^* = \sum_i |u_i|^2 + \sum_{i \neq j} u_i u_j^*.$$

Le premier terme correspond à la contribution de chaque chemin alors que le deuxième correspond aux effets d’interférence entre les chemins. Les effets d’interférence sont souvent négligés, pourtant si l’on pose $A = B$, chaque chemin i est parcouru dans les deux sens avec la même amplitude, ce que nous notons $u_i = u_i^+ = u_i^-$, voir figure 1.1. L’intensité

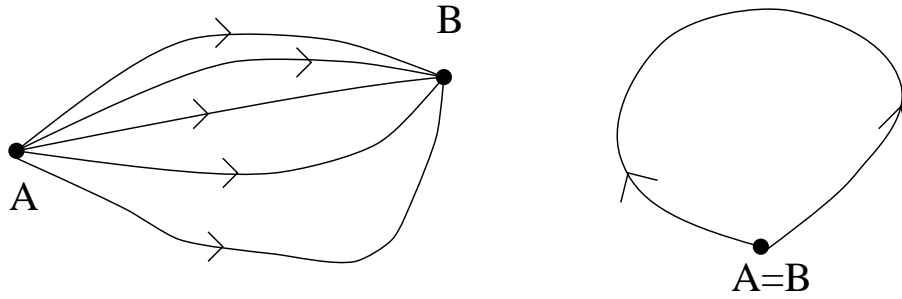


FIG. 1.1 - Le transport de l'intensité d'un point A à un point B est donné par la somme sur les différents chemins. Lorsque $A = B$ les effets d'interférences font que l'intensité est le double de l'intensité "classique".

associée au chemin i est donc donnée par la somme sur les sens de parcours du produit des amplitudes :

$$I_i(A = B) = \sum_{s, s' = +, -} u_i^s u_i^{s'*} = 2|u_i|^2 + 2u_i u_i^* = 4|u_i|^2.$$

Elle est deux fois plus élevée que la valeur obtenue sans interférences $2|u_i|^2$ [12]. Ceci est le mécanisme responsable du cône de rétrodiffusion cohérente de la lumière [7].

Même si les coefficients de transmission moyens sont correctement décrits par une théorie de Boltzmann classique, il a été montré, au milieu des années 1980, que des conducteurs mésoscopiques faiblement désordonnés donnent lieu à des fluctuations anormales de la conductance d'un échantillon à un autre. Ce phénomène a été appelé *fluctuations universelles de conductance* (UCF) [8] car ces fluctuations sont indépendantes de la taille du système, de la nature du désordre et même de la dimensionalité du système.

Imaginons un fil de cuivre à température ambiante, de section S et de longueur L macroscopique. Pour ce système nous sommes dans le régime dit du transport de particules car la longueur de cohérence des électrons est très inférieure à la longueur du fil, $L \gg L_\phi$. La conductance est donnée par la loi d'Ohm, $g = S\sigma/L$ où σ est la conductivité électrique. En subdivisant le fil en N sections de longueur L_ϕ , qui correspondent aux sections où le transport des électrons est cohérent, la loi des grands nombres dit que les fluctuations de conductance $\delta g = \sqrt{\langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2}$ sont données par,

$$\frac{\delta g}{\langle g \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \propto \sqrt{\frac{L_\phi}{L}},$$

soit $\delta g \propto L^{-3/2}$. On s'attend donc à de très faibles fluctuations de conductance d'un échantillon à un autre. Chaque section de longueur L_ϕ apparaît comme une réalisation

du désordre et les propriétés du fil en son entier sont données par une moyenne sur les réalisations du désordre. Le système est dit *auto-moyennant* car les fluctuations de conductance suivent la loi des grands nombres.

En revanche pour les systèmes mésoscopiques faiblement désordonnés, la conductance sans dimension est donnée par la formule de Landauer $g = \sum_{a,b} T_{ab}$, où T_{ab} est le coefficient de transmission d'un canal a vers un canal b [4]. On montre que la conductance moyenne est donnée par $\langle g \rangle \approx k_0^2 S l^* / L$ où k_0 est le nombre d'onde, comme dans la théorie de Boltzmann [4]. En revanche les fluctuations de conductance d'un échantillon à l'autre sont $\delta g \approx 1$, et ceci indépendamment de L [4]. Par conséquent,

$$\frac{\delta g}{\langle g \rangle} \propto L.$$

Ceci illustre le fait que les systèmes mésoscopiques faiblement désordonnés ne sont pas des milieux auto-moyennants. Cette déviation à la loi des grands nombres est en relation directe avec les effets d'interférences, qui ne peuvent pas être négligés, même à l'échelle L de l'échantillon.

Les chapitres qui suivent sont relatifs à la description des propriétés de transport des systèmes mésoscopiques faiblement désordonnés. La problématique est de déterminer les propriétés de transport telles que les coefficients de transmission, la conductance ainsi que les corrélations et les fluctuations de ces quantités tout en prenant rigoureusement en compte les effets de cohérence. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'aspect vectoriel des ondes électromagnétiques car dans la plupart des travaux théoriques actuels la lumière est assimilée à une onde scalaire.

1.4 Plan de la première partie

Au **chapitre 2**, nous présenterons les propriétés de transport d'une onde acoustique dans un milieu mésoscopique faiblement désordonné. Les résultats de ce chapitre sont connus et peuvent être obtenus par plusieurs méthodes. Nous utiliserons les méthodes diagrammatiques qui permettront de déterminer le coefficient de transmission moyen de l'intensité pour une onde plane incidente. Les corrélations entre les coefficients de transmission de l'intensité sont le cœur du chapitre 2 car elles déterminent les fluctuations des coefficients de transmission autour de leur valeur moyenne. Le calcul de la fonction de corrélation de l'intensité transmise nous amènera à introduire trois nouvelles fonctions de corrélation, connues dans la littérature sous les noms de $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$. Nous montrerons que la fonction de corrélation $C^{(3)}$ explique les fluctuations universelles de

conductance. Finalement, nous étudierons l'influence de l'atténuation, caractérisée par la longueur d'absorption L_a , sur les propriétés de transport.

Au **chapitre 3** nous étudierons les propriétés de transport d'une onde électromagnétique polarisée à travers un milieu mésoscopique faiblement désordonné. La difficulté propre à cette étude est de prendre en compte l'aspect vectoriel des ondes électromagnétiques. Les résultats du chapitre 3 sont nouveaux car, jusqu'à présent, l'aspect vectoriel de la lumière a toujours été négligé. Les méthodes de résolution diagrammatique étant particulièrement techniques, l'organisation du chapitre 3 est volontairement très proche de celle du chapitre 2. Nous nous reporterons souvent aux résultats acoustiques pour alléger autant que possible les calculs. Nous verrons que l'étude du transport d'une onde électromagnétique polarisée introduit une forme de fonction de corrélation de l'intensité transmise très intéressante. Elle généralise le calcul effectué pour une onde acoustique mais permet, en croisant les polarisations des ondes, de mesurer directement la fonction de corrélation $C^{(3)}$, qui est le coeur des fluctuations universelles de conductance.

Pour conclure, au **chapitre 4**, nous donnerons un bilan de cette première partie et nous présenterons les perspectives expérimentales des corrélations de l'intensité transmise pour des ondes polarisées circulairement

Bibliographie

- [1] H.C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover New York, Inc., 1981.
- [2] J. Vidale et P. Earle. Fine-scale heterogeneity in the earth's inner core. *Nature*, 404:273, 2000.
- [3] J. Vidale D. Dodge et P. Earle. Slow differential rotation of the earth's inner core indicated by temporal changes in scattering. *Nature*, 405:445, 2000.
- [4] R. Berkovits et S. Feng. Correlations in coherent multiple scattering. *Phys. Rep.*, 238:135, 1994.
- [5] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. Academic Press New York, 1978.
- [6] M. Kaveh. Electron and optical phenomena. *Physica B*, 175:1, 1991.
- [7] E. Akkermans P. Wolf R. Maynard et G. Maret. Theoretical study of coherent backscattering of light by disordered media. *J. Phys*, 49:77, 1988.
- [8] S. Feng C. Kand P. A. Lee et A. D. Stone. Correlations and fluctuations of coherent wave transmission through disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 61:834, 1988.
- [9] P. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492, 1958.
- [10] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, second edition, 1975.
- [11] A. Aki et P. Richards. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Freeman, San Francisco, first edition, 1980.

- [12] E. Akkermans. *Propagations d'ondes dans les milieux désordonnés*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1986.

Chapitre 2

Propagation cohérente d'une onde acoustique à travers un milieu hétérogène : transmission, corrélations et fluctuations

2.1 Introduction

Imaginons une onde acoustique incidente sur un milieu désordonné de longueur L et de surface $S = W \times W$ (figure 2.1). Statistiquement, au bout d'un libre parcours moyen, l'onde rencontre une hétérogénéité et change de direction par diffusion. L'onde résultante va de nouveau se propager dans le milieu avant de rencontrer un nouveau diffuseur. Dans le régime mésoscopique de faible désordre, caractérisé par $\lambda \ll l^* \ll L \ll L_{\phi,a}$, les multiples diffusions redistribuent aléatoirement la phase de l'onde, mais ne la détruisent pas comme, par exemple, l'effet Doppler.

On pourrait penser que la nature aléatoire du milieu tendrait à moyennner les interférences. En réalité il n'en est rien et la figure d'interférences est tavelée (figure 2.1) (speckle en anglais) [1, 2]. Ces irrégularités de l'intensité n'ont rien de fortuit. Une nouvelle réalisation du désordre donnera des tavelures similaires dans leur forme et leur répartition mais bien spécifiques de cette réalisation. De fait, la figure d'interférences est très sensible au moindre déplacement d'un diffuseur [3]; elle est l'empreinte digitale du désordre.

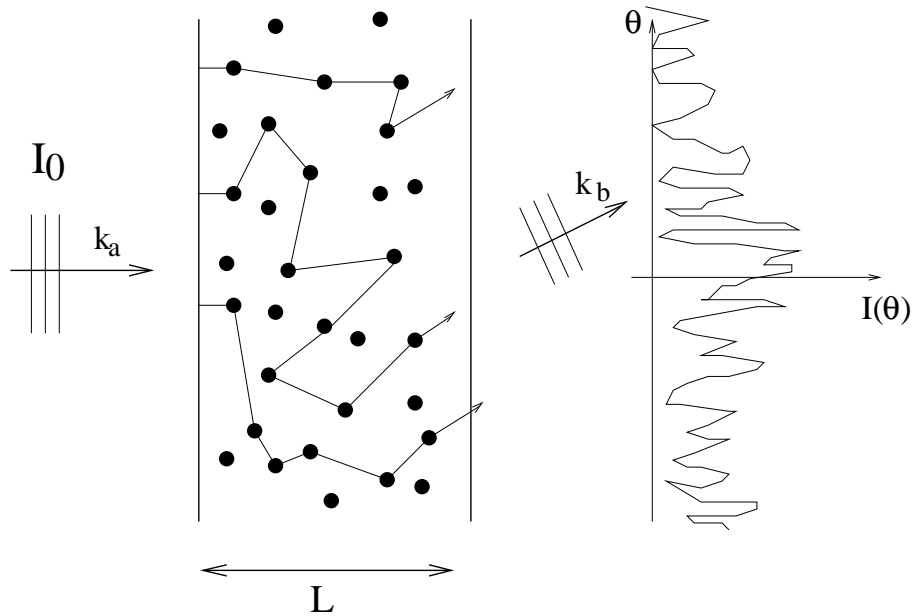


FIG. 2.1 - La propagation d'une onde à travers un milieu multiplement diffusant génère une figure d'intensité très complexe. Les différents chemins de propagation interfèrent les uns avec les autres pour former une image tavelée.

Dans ce chapitre nous allons étudier les propriétés de transport d'une onde scalaire à travers un milieu mésoscopique faiblement désordonné. Après avoir calculé les coefficients de transmission ainsi que la conductance moyenne nous allons nous concentrer sur les corrélations et les fluctuations des coefficients de transmission. Ceci nous amènera à introduire trois fonctions de corrélations, connues dans la littérature sous les noms de $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ [2, 3, 4, 5]. Nous verrons qu'elles décrivent respectivement les fluctuations du coefficient de transmission, les fluctuations du coefficient de transmission totale et enfin les fluctuations de conductance [3, 5]. Nous étudierons aussi l'influence de l'absorption sur les propriétés de transport [5, 6, 7].

2.2 Transmission, corrélations et fluctuations : définitions

Soit une onde plane acoustique, d'intensité I_0 , incidente sur un milieu hétérogène avec la direction \mathbf{k}_a et émergente avec la direction \mathbf{k}_b (figure 2.1). On peut introduire trois

coefficients de transmission ainsi que leurs fonctions de corrélation respectives [5].

1. En premier lieu définissons la transmission et la corrélation angulaire de l'intensité. Notons $T_{k_a k_b} = I(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)/I_0$ le coefficient de transmission d'une onde monochromatique incidente avec la direction \mathbf{k}_a et émergente avec la direction \mathbf{k}_b . La fonction de corrélation du coefficient de transmission est définie par

$$\langle \delta T_{k_a k_b} \delta T_{k_a' k_b'} \rangle = \langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle - \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle,$$

où $\langle \dots \rangle$ dénote une moyenne sur les réalisations du désordre. Les fluctuations de $T_{k_a k_b}$ autour de sa moyenne $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ s'obtiennent en posant $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_a'$ et $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_b'$. Nous verrons que les corrélations de l'intensité sont directement liées à ce que nous appellerons la fonction de corrélation $C^{(1)}$ [3, 4, 5].

2. Il est aussi possible de mesurer, pour une direction de l'onde incidente \mathbf{k}_a , la somme des intensités émergentes en transmission. Expérimentalement ceci peut s'effectuer par le biais d'une sphère d'intégration à la sortie du milieu [8]. Cela nous amène à introduire le coefficient de transmission total que nous notons T_{k_a} , $T_{k_a} = \sum_{\mathbf{k}_b} T_{k_a k_b}$, et sa moyenne $\langle T_{k_a} \rangle$ sur les réalisations du désordre. Les corrélations de T_{k_a} sont définies par

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{k_a} \delta T_{k_a'} \rangle &= \langle T_{k_a} T_{k_a'} \rangle - \langle T_{k_a} \rangle \langle T_{k_a'} \rangle, \\ &= \sum_{\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_b'} \langle \delta T_{k_a k_b} \delta T_{k_a' k_b'} \rangle. \end{aligned}$$

Nous verrons que cette quantité est directement liée à la fonction appelée $C^{(2)}$ [3, 4, 5].

3. Finalement, si l'on somme $T_{k_a k_b}$ sur les directions des ondes incidentes et transmises, nous accédons à la conductance $T = \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} T_{k_a k_b}$ et à la conductance moyenne que nous noterons, en lien avec la formule de Landauer [3], $g_{scal}^0 = \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \langle T_{k_a k_b} \rangle$. Les fluctuations de la conductance autour de sa valeur moyenne sont caractérisées par la fonction

$$\begin{aligned} \langle \delta T^2 \rangle &= \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2, \\ &= \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_a', \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_b'} \langle \delta T_{k_a k_b} \delta T_{k_a' k_b'} \rangle. \end{aligned}$$

et nous verrons qu'elles sont données par la fonction de corrélation $C^{(3)}$. C'est cette fonction qui va décrire les fluctuations universelles de conductance (UCF) [3, 4, 5].

La question qui nous occupe à présent est de déterminer le coefficient de transmission moyen $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ et le corrélateur $\langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle$. Ceci nous permettra d'accéder aux autres coefficients de transmission et à leurs fluctuations décrites précédemment.

2.2.1 La fonction de corrélation $C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}$

Le coefficient de transmission de l'intensité $T_{k_a k_b}$ est le produit du coefficient de transmission du champ acoustique $t_{k_a k_b} = E_{\mathbf{k}_a}(\mathbf{k}_b)/E_0$ et de son complexe conjugué $t_{k_a k_b}^*$: $T_{k_a k_b} = t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^*$. La corrélation $\langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle$ se décompose par conséquent en trois termes [9],

$$\begin{aligned} \langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle &= \langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* t_{k_a' k_b'} t_{k_a' k_b'}^* \rangle, \\ &= \langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle \langle t_{k_a' k_b'} t_{k_a' k_b'}^* \rangle \\ &\quad + \langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle \langle t_{k_a' k_b'} t_{k_a k_b} \rangle \\ &\quad + \Gamma_4(t_{k_a k_b}, t_{k_a k_b}^*, t_{k_a' k_b'}, t_{k_a' k_b'}^*). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les deux premiers termes de la relation (2.1) sont le résultat de l'application du théorème de Wick alors que le troisième terme correspond à la correction aux champs non Gaussiens [9]. On reconnaît dans le premier terme de (2.1) le produit $\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle$ alors que le deuxième terme apparaît comme le module carré du corrélateur du coefficient de transmission du champ acoustique. Par conséquent $\langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle$ se réécrit

$$\langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'} \rangle = \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle + |\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle|^2 + \Gamma_4(t_{k_a k_b}, t_{k_a k_b}^*, t_{k_a' k_b'}, t_{k_a' k_b'}^*).$$

Introduisons maintenant la fonction de corrélation $C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}$ définie par [3, 4, 5],

$$\begin{aligned} C_{k_a, k_a', k_b, k_b'} &\equiv \frac{\langle \delta T_{k_a k_b} \delta T_{k_a' k_b'} \rangle}{\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle}, \\ &\equiv \frac{|\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle|^2}{\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle} + \frac{\Gamma_4(t_{k_a k_b}, t_{k_a k_b}^*, t_{k_a' k_b'}, t_{k_a' k_b'}^*)}{\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle}, \\ &\equiv C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}^{(1)} + C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}^{(2)} + C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $\delta T_{k_a k_b} = T_{k_a k_b} - \langle T_{k_a k_b} \rangle$ et $\delta T_{k_a' k_b'} = T_{k_a' k_b'} - \langle T_{k_a' k_b'} \rangle$. La fonction $C^{(1)}$ est définie par le rapport de $|\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle|^2$ sur $\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle$ alors que le rapport $\Gamma_4(t_{k_a k_b}, t_{k_a k_b}^*, t_{k_a' k_b'}, t_{k_a' k_b'}^*)$ sur $\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_a' k_b'} \rangle$ va pouvoir se décomposer en deux termes, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$. Nous verrons dans les sections suivantes que $C^{(1)}$ est le terme dominant de la corrélation de l'intensité transmise. La décomposition en $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ de la fonction Γ_4 correspond à des mécanismes de corrélation différents et revêt un sens physique bien particulier [3, 4, 5].

2.3 Calcul de la transmission et de la fonction de corrélation $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$

Dans cette section nous allons détailler le calcul des différents termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$. Pour cela considérons une onde scalaire monochromatique de pulsation ω_0 se propageant dans un milieu aléatoire linéaire non absorbant. L'amplitude du champ acoustique E est solution de l'équation d'onde scalaire,

$$\Delta E(\mathbf{r}) + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))E(\mathbf{r}) = J(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

où $J(\mathbf{r})$ est la source du champ, $\mu(\mathbf{r})$ représente les fluctuations de l'indice de réfraction et $k_0 = \omega_0/c_0$ est le nombre d'onde. Le désordre du milieu est entièrement caractérisé par les fluctuations de l'indice de réfraction $\mu(\mathbf{r})$. Par conséquent, pour décrire complètement le système, il faut spécifier les propriétés statistiques de $\mu(\mathbf{r})$, c'est-à-dire l'intensité des fluctuations aussi bien que leurs corrélations spatiales. Nous supposons que $\mu(\mathbf{r})$ obéit à une statistique de bruit blanc Gaussien,

$$\begin{aligned} \langle \mu(\mathbf{r}) \rangle &= 0, \\ k_0^4 \langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle &= \gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

le symbole $\langle \dots \rangle$ marquant la moyenne d'ensemble sur les réalisations du désordre. On peut montrer que la statistique de bruit blanc Gaussien de $\mu(\mathbf{r})$ est équivalente à une collection de diffuseurs de Rayleigh (c'est-à-dire que les diffuseurs ont une taille caractéristique très inférieure à la longueur d'onde) répartis aléatoirement dans le milieu [10],

$$\mu(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N v_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

dans la limite où la densité η de diffuseurs et v_0 vérifient la relation,

$$\eta \rightarrow \infty \quad v_0 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \eta v_0^2 = \text{constante}.$$

Il est important de remarquer que la section efficace d'un diffuseur de Rayleigh est isotrope et qu'il n'y a, par conséquent, pas de différence entre le libre parcours moyen l et le libre parcours moyen de transport l^* .

La fonction de Green moyenne de l'équation (2.3) est donnée par $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$ où $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est solution de l'équation d'onde,

$$\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

La fonction de Green moyenne $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ s'obtient par des techniques perturbatives classiques [9]. Elles consistent à développer G en une série ayant pour paramètre $\mu(\mathbf{r})$ [8, 9, 11, 12]. Chaque terme de la série peut alors être vu comme un ordre dans la diffusion multiple. Pour un milieu à 3 dimensions, on montre que la fonction de Green moyenne est donnée, en espace de Fourier, par [3, 11]

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{k^2 - \nu^2} \quad \text{avec} \quad \nu^2 = (k_0^2 + ik_0/l),$$

qui se réécrit en espace direct,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-1/(2l)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Le libre parcours moyen l est relié aux fluctuations de l'indice de réfraction $\mu(\mathbf{r})$ par la relation $\gamma = 4\pi/l$ [3, 11]. L'intensité cohérente dans le milieu s'obtient simplement en prenant le module carré de la fonction de Green moyenne,

$$I_{coh}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\langle g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle|^2 \propto \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/l}}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}.$$

La décroissance exponentielle de l'intensité cohérente I_{coh} décrit la profondeur de pénétration du faisceau cohérent (loi de Beer-Lambert). Le libre parcours moyen l est la longueur caractéristique sur laquelle s'atténue le faisceau cohérent.

2.3.1 Intensité diffuse

A la différence de l'intensité cohérente, qui est le module carré du champ, l'intensité diffuse est définie comme la moyenne du module carré du champ acoustique. Par conséquent le coefficient de transmission de l'intensité diffuse est donné par $\langle T_{k_a k_b} \rangle = \langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle$. Aussi si l'on visualise le coefficient de transmission du champ $t_{k_a k_b}$ par une somme sur les chemins de diffusions multiples α des coefficients de transmission partiels, $t_{k_a k_b}$ prend la forme [3],

$$t_{k_a k_b} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{iS_{\alpha} k_0},$$

où A_{α} est l'amplitude d'une onde ayant suivi le chemin α et S_{α} son chemin optique [3]. Le produit $\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle$ devient alors

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \langle A_{\alpha} A_{\alpha'} e^{i(S_{\alpha} - S_{\alpha'}) k_0} \rangle.$$

A première vue, évaluer $\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle$ semble très difficile, mais si l'on analyse de près les différents termes de la somme nous nous apercevons que tous les produits de deux

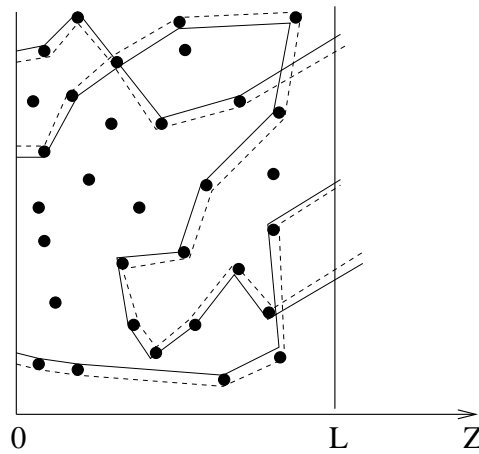


FIG. 2.2 - Propagation d'une onde (en traits plein) et de sa complexe conjuguée (en pointillés) le long d'un chemin de diffusion multiple. Les phases des deux ondes se compensent exactement le long de ces chemins.

chemins différents disparaissent après la moyenne sur les différentes réalisations. En effet, deux chemins différents $\alpha \neq \alpha'$, ont des chemins optiques indépendants. La quantité $e^{i(S_\alpha - S_{\alpha'})k_0}$ est par conséquent une variable complexe aléatoire et, de ce fait, la moyenne sur les réalisations annule le terme $A_\alpha A_{\alpha'} e^{i(S_\alpha - S_{\alpha'})k_0}$. Le corrélateur $\langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle$ se réduit donc à une somme sur les mêmes chemins comme indiqué en figure 2.2. Sur ce diagramme, des ondes partielles et leur complexes conjugués se propagent selon la même suite de diffuseurs et ainsi les phases des ondes se compensent exactement. Ce type de diagramme est appelé diagramme en échelle (ladder diagram en anglais). A ce stade il est important d'introduire l'opérateur \mathcal{L} qui représente la somme de tous les diagrammes en échelle [3, 5, 8, 11] débutant sur un diffuseur en \mathbf{r}_1 et finissant sur un diffuseur en \mathbf{r}_2 . Cet opérateur décrit la propagation de l'intensité diffuse d'un diffuseur en \mathbf{r}_1 à un diffuseur en \mathbf{r}_2 et par conséquent ne dépend pas des quatre variables \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_4 mais seulement de deux, \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 [3],

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4).$$

De plus on montre que $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est solution de l'équation de diffusion [11],

$$-\Delta \mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{12\pi}{l^*{}^3} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.4)$$

En espace de Fourier, pour un milieu infini à trois dimensions, l'opérateur \mathcal{L} est donc donné par [11]

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \frac{12\pi}{l^*{}^3 q^2}.$$

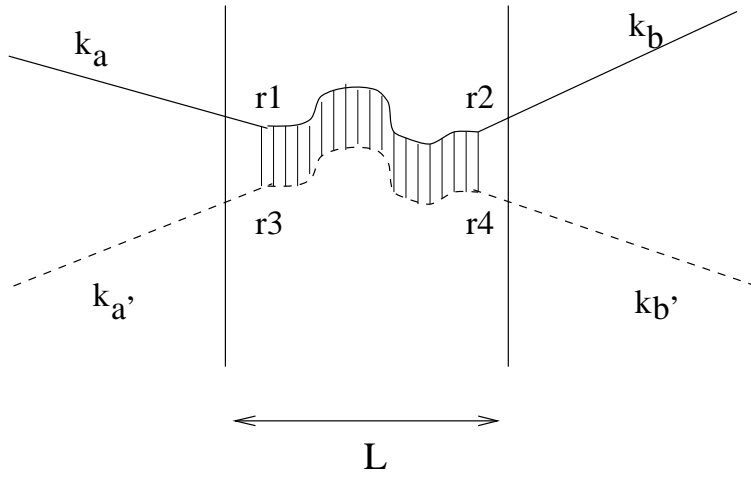


FIG. 2.3 - Description graphique du corrélateur $\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle$.

Pour la géométrie de la tranche, \mathcal{L} doit obéir aux conditions aux limites suivantes :

$$\mathcal{L}(z_1 = 0, z_2 = L) = 0.$$

Par conséquent la solution de l'équation (2.4) est [3, 5]

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \mathbf{p} \frac{12\pi \sinh(p(L - z_>)) \sinh(pz_<)}{l^{*3} p \sinh(pL)} e^{i(\rho_1 - \rho_2) \cdot \mathbf{p}}, \quad (2.5)$$

où $z_> = \max(z_1, z_2)$ et $z_< = \min(z_1, z_2)$ et où nous avons noté $\mathbf{r}_1 = (z_1, \rho_1)$ et $\mathbf{r}_2 = (z_2, \rho_2)$. Le propagateur \mathcal{L} ne dépend que de $\rho_1 - \rho_2$ car le système est invariant par translation.

Le corrélateur $\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle$ s'obtient en attachant à \mathcal{L} les ondes incidentes et émergentes (voir figure 2.3) puis en intégrant sur toutes les positions possibles du premier et du dernier diffuseur [3]

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle \propto \int d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_3 d^2 \mathbf{r}_4 e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_{a'} \cdot \mathbf{r}_3} \mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) e^{i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{k}_{b'} \cdot \mathbf{r}_4}.$$

Pour simplifier, nous supposons que les ondes incidentes et émergentes subissent leur première et dernière diffusion à un libre parcours moyen l^* des surfaces. Le traitement complet des conditions aux limites est très compliqué mais ne change pas fondamentalement le résultat obtenu par cette approximation [5, 12, 13]. L'intégration sur $\mathbf{r}_1 = (\rho_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (\rho_2, z_2)$, $\mathbf{r}_3 = (\rho_3, z_3)$ et $\mathbf{r}_4 = (\rho_4, z_4)$ se réduit donc à une intégration sur ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 . En se plaçant au voisinage de l'incidence normale le corrélateur devient [3],

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle = \left(\frac{l^*}{2k_0 S} \right)^2 \int d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 e^{-i\Delta \mathbf{q}_a \cdot \rho_1} \mathcal{L}(l^*, L - l^*, \rho_1 - \rho_2) e^{i\Delta \mathbf{q}_b \cdot \rho_2}, \quad (2.6)$$

où $\Delta \mathbf{q}_a$ et $\Delta \mathbf{q}_b$ sont les composantes parallèles aux interfaces des vecteurs $\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_{a'}$ et $\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_{b'}$. Dans l'expression (2.6) les deux termes de phase $e^{-i\Delta \mathbf{q}_a \cdot \rho_1}$ et $e^{i\Delta \mathbf{q}_b \cdot \rho_2}$ sont dus aux interférences entre les deux faisceaux incidents en \mathbf{r}_1 et les deux faisceaux émergents en \mathbf{r}_2 . En effectuant le changement de variable $\rho = \rho_1 - \rho_2$ il vient

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle = \left(\frac{l^*}{2k_0 S} \right)^2 \int d^2 \rho d^2 \rho_2 e^{-i\Delta \mathbf{q}_a \cdot \rho} e^{-i(\Delta \mathbf{q}_a - \Delta \mathbf{q}_b) \cdot \rho_2} \mathcal{L}(l^*, L - l^*, \rho),$$

puis en intégrant sur ρ et ρ_2 et en utilisant l'expression de $\mathcal{L}(l^*, L - l^*, \rho_1 - \rho_2)$ donnée en (2.5), nous obtenons l'expression suivante pour $\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle$ [3, 5, 12]

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle = \frac{16\pi}{3k_0^2 S} \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} \frac{\sinh^2 \Delta q_a l^*}{\Delta q_a l^* \sinh \Delta q_a L}, \quad (2.7)$$

qui se réduit, pour les petites valeurs de $\Delta q_a l^*$, à

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle = \frac{16\pi l^*}{3k_0^2 S L} \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} \frac{\Delta q_a L}{\sinh \Delta q_a L}.$$

Le terme $\delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b}$ est la marque de l'invariance du système par translation.

2.3.2 Coefficient de transmission et conductance

Si nous posons $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{a'}$ et $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_{b'}$ la relation (2.7) n'est autre que le coefficient de transmission de l'intensité $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ à travers le milieu. En introduisant le nombre de modes supportés par le système, $N = k_0^2 S / 4\pi$, il vient [12]

$$\langle T_{k_a k_b} \rangle = \frac{4l^*}{3NL}. \quad (2.8)$$

On remarque que $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ est indépendant de l'orientation des ondes incidentes et émergentes et correspond au résultat "classique" obtenu par la théorie de Boltzmann.

Le coefficient de transmission total moyen $\langle T_{k_a} \rangle$ et la conductance moyenne g_{scal}^0 du système se déduisent facilement de l'expression précédente de $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ en sommant respectivement sur les directions \mathbf{k}_b et \mathbf{k}_a [12],

$$\begin{aligned} \langle T_{k_a} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}_b} \langle T_{k_a k_b} \rangle = \frac{4l^*}{3L}, \\ g_{scal}^0 &= \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \langle T_{k_a k_b} \rangle = \frac{k_0^2 S l^*}{3\pi L} = \frac{4Nl^*}{3L}. \end{aligned}$$

Il est important de noter que dans le régime mésoscopique faiblement désordonné, g_{scal}^0 est généralement beaucoup plus grand que 1 car $k_0^2 S = 4\pi^2 S / \lambda^2 \gg 1$ l'emporte sur le rapport l^* / L . Pour $g_{scal}^0 < 1$ nous entrons dans le régime mésoscopique fortement désordonné.

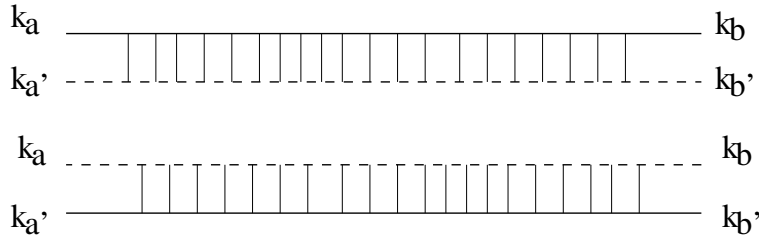


FIG. 2.4 - Représentation diagrammatique du terme de corrélation $C^{(1)}$. Les deux diagrammes en échelle ne sont pas connectés.

2.3.3 Calcul de $C^{(1)}$

Nous pouvons maintenant facilement évaluer le terme $C^{(1)}$ de la corrélation de l'intensité transmise $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$ grâce aux relations (2.7) et (2.8). Il vient [3, 4, 5]

$$\begin{aligned} C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} &= | \langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle |^2 / (\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle) \\ &= \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} \left(\frac{L}{l^*} \right)^2 \left(\frac{\sinh^2 \Delta q_a l^*}{\Delta q_a l^* \sinh \Delta q_a L} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour des petits angles d'incidence, $\Delta q_a l^* \ll 1$, l'expression de $C^{(1)}$ se simplifie en

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} = \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L),$$

où la fonction F_1 est donnée par

$$F_1(x) = \frac{x^2}{\sinh^2 x}, \quad F_1(0) = 1, \quad F_1(x \rightarrow \infty) \rightarrow x^2 e^{-2x}.$$

D'un point de vue diagrammatique, le terme $C^{(1)}$ de la fonction de corrélation $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$ est représenté par la figure 2.4. Les deux diagrammes en échelle, qui représentent respectivement $\langle t_{k_a k_b} t_{k_{a'} k_{b'}}^* \rangle$ et $\langle t_{k_a k_b}^* t_{k_{a'} k_{b'}} \rangle$, sont déconnectés [3, 4, 5, 12]. Le résultat est le produit des deux diagrammes.

La fonction $\delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b}$, de $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)}$ illustre ce qui a été appelé *l'effet mémoire* [3, 14, 15]. Pour que le terme $C^{(1)}$ soit non nul, il est nécessaire que $\Delta \mathbf{q}_a = \Delta \mathbf{q}_b$. En d'autres termes, si nous changeons la direction de l'onde incidente, ce qui revient à changer le vecteur $\Delta \mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{a'}$, alors la figure de tavelures est déplacée du même angle. Ainsi, même dans un milieu multiplement diffusant, il est possible de "suivre" l'orientation du faisceau incident. Malheureusement lorsque Δq_a devient de l'ordre de $1/L$, il faut prendre

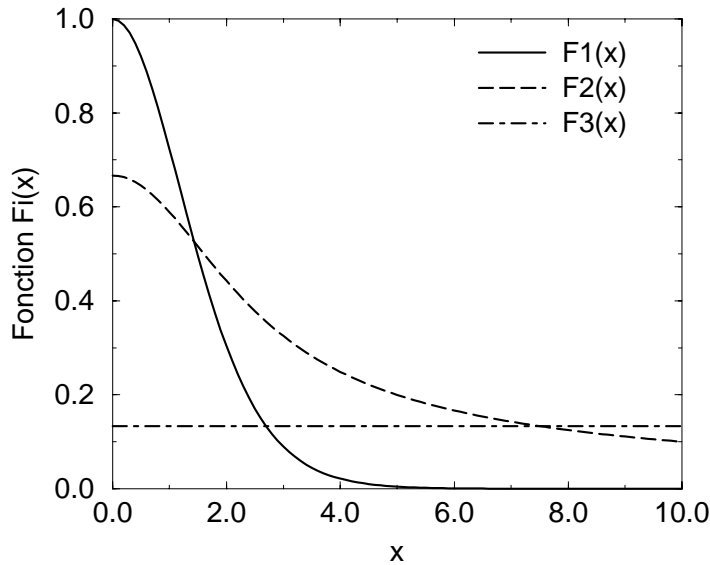


FIG. 2.5 - Représentation graphique des fonctions F_1 , F_2 et F_3 . La fonction F_1 décroît exponentiellement avec l'argument x alors que la fonction F_2 décroît en $1/x$ et que F_3 est constante.

en compte le terme de décorrélation F_1 , mais néanmoins l'effet mémoire est remarquable dans un milieu fortement hétérogène.

La représentation graphique de la fonction F_1 est donnée sur la figure 2.5. La décroissance est exponentielle avec l'argument $\Delta q_a L$, ce qui induit que la corrélation entre différentes directions est très faible. Pour cette raison $C^{(1)}$ porte le nom de corrélation à courte portée.

2.3.4 Calcul de $C^{(2)}$

Dans cette section nous allons nous concentrer sur le terme $C^{(2)}$ de la fonction de corrélation $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}$ définie par la relation (2.2). Les deux diagrammes qui donnent naissance à $C^{(2)}$ sont représentés sur la figure 2.6 [3, 4, 5, 12]. A la différence de la figure 2.4, qui est la représentation diagrammatique de $C^{(1)}$, les diagrammes en échelle sont connectés par le biais de ce qui est appelé un vertex de Hikami [16]. Le terme de corrélation $C^{(2)}$ s'écrit [3, 5, 12]

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} = C_I^{(2)} + C_{II}^{(2)},$$

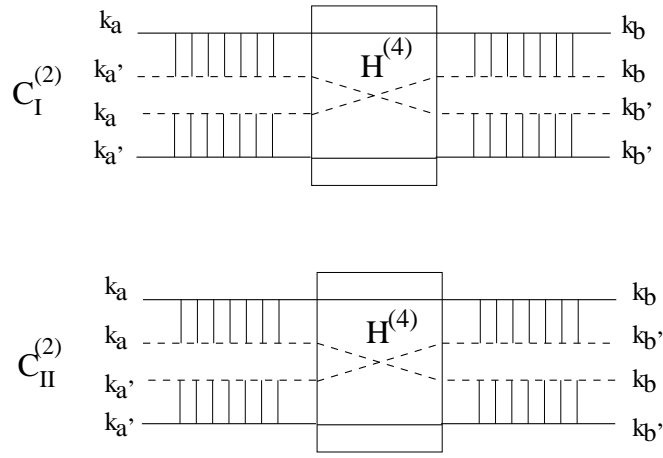


FIG. 2.6 - Représentation diagrammatique des deux termes donnant naissance à la corrélation $C^{(2)}$. A la différence de la corrélation $C^{(1)}$ les diagrammes en échelles sont connectés.

où la forme explicite de $C_I^{(2)}$ est

$$C_I^{(2)} \propto \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_{a1} d\mathbf{r}_{a3} d\mathbf{r}_{b2} d\mathbf{r}_{b4} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_{a1}} e^{i\mathbf{k}_{a'} \cdot \mathbf{r}_{a1}} e^{-i\mathbf{k}_{a'} \cdot \mathbf{r}_{a3}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_{a3}} \mathcal{L}(\mathbf{r}_{a1}, \mathbf{r}_1) \mathcal{L}(\mathbf{r}_{a3}, \mathbf{r}_3) H^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \mathcal{L}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{b2}) \mathcal{L}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_{b4}). \quad (2.10)$$

En utilisant la même approximation que celle utilisée au cours du calcul de $\langle t_{k_a k_b} t_{a' b'}^* \rangle$, $C_I^{(2)}$ se réécrit sous la forme [3]

$$C_I^{(2)} \propto \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\rho_{a1} d\rho_{b2} d\rho_{a3} d\rho_{b4} e^{-i\Delta\mathbf{q}_a \cdot (\rho_1 - \rho_2)} \mathcal{L}((\rho_{a1}, l^*), \mathbf{r}_1) \mathcal{L}((\rho_{a3}, l^*), \mathbf{r}_3) H^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \mathcal{L}(\mathbf{r}_2, (\rho_{b2}, L - l^*)) \mathcal{L}(\mathbf{r}_4, (\rho_{b4}, L - l^*)). \quad (2.11)$$

Le vertex de Hikami $H^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)$ est donné, à l'ordre le plus bas dans la série de perturbation par les trois diagrammes de la figure 2.7 [3, 4, 5, 12, 16]. Le premier diagramme est simplement l'échange d'un champ entre le diagramme en échelle du haut et le diagramme en échelle du bas alors que pour les deux autres diagrammes l'échange se fait avec une diffusion. En espace de Fourier, où le calcul est plus aisé, le vertex de Hikami s'écrit

$$H^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) = H^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) + H^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) + H^3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4),$$

avec $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ et où H^1 , H^2 et H^3 sont

$$H^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) G(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) G^*(\mathbf{q}),$$

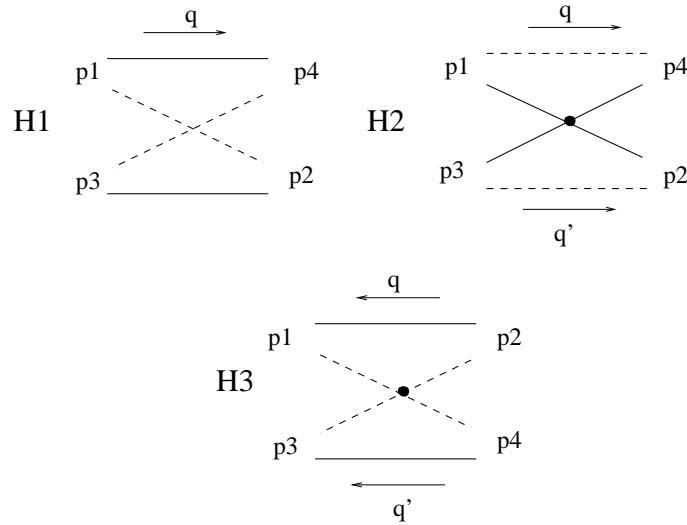


FIG. 2.7- Représentation diagrammatique des trois termes constituant le vertex de Hikami $H^{(4)}$ à l'ordre le plus bas dans la série de perturbation.

$$\begin{aligned}
 H^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) &= \frac{4\pi}{l} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G^*(\mathbf{q}) G(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) \times \\
 &\quad G(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3) G^*(\mathbf{q}') G(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_2), \\
 H^3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) &= \frac{4\pi}{l} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G^*(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4) G(\mathbf{q}') G^*(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_3) \times \\
 &\quad G^*(\mathbf{q} - \mathbf{p}_2) G(\mathbf{q}) G^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_1).
 \end{aligned}$$

Le calcul de H^1 , H^2 et H^3 s'effectue en développant la fonction de Green moyenne $G(\mathbf{q} + \mathbf{p})$ au deuxième ordre en \mathbf{q} autour de \mathbf{p} [8, 12],

$$G(\mathbf{q} + \mathbf{p}) = G(\mathbf{p}) - [q^2 + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] G(\mathbf{p})^2 + 4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 G(\mathbf{p})^3 + O(q^3),$$

avec

$$G(\mathbf{p}) = \frac{1}{p^2 - \nu^2}, \quad \nu^2 = k_0^2 + ik_0/l,$$

puis en intégrant sur les impulsions libres \mathbf{q} et \mathbf{q}' . Le calcul est relativement long mais direct et nous arrivons au résultat suivant [3, 4, 5, 12],

$$H^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) = \frac{-l^5}{48\pi k^2} (2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - \mathbf{p}_4^2). \quad (2.12)$$

Il est maintenant possible de calculer le terme $C_I^{(2)}$ [3, 5, 12],

$$C_I^{(2)} = \frac{1}{g_{scal}^0} F_2(\Delta q_a L),$$

où la fonction F_2 est donnée par

$$F_2(x) = \frac{\sinh 2x - 2x}{2x \sinh^2 x}, \quad F_2(0) = \frac{2}{3}, \quad F_2(x \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{x}, \quad (2.13)$$

et g_{scal}^0 , la conductance moyenne du système

$$g_{scal}^0 = \frac{k_0^2 l^* S}{3\pi L}.$$

Le calcul de $C_{\text{II}}^{(2)}$ est identique à celui de $C_{\text{I}}^{(2)}$ en permutant le rôle des indices a, a', b et b' . La fonction de corrélation $C^{(2)}$ est par conséquent [3, 5, 12],

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} = \frac{1}{g_{scal}^0} [F_2(\Delta q_a L) + F_2(\Delta q_b L)].$$

La représentation graphique de la fonction F_2 est donnée sur la figure 2.5. Il est intéressant de remarquer que la corrélation $C^{(2)}$ contient un facteur $1/g_{scal}^0$ qui la rend beaucoup plus petite que la corrélation $C^{(1)}$. En revanche la décroissance est algébrique avec l'argument $\Delta q_{a,b} L$ (en $1/x$) et est donc beaucoup plus lente que celle de $C^{(1)}$. Cela en fait un terme de corrélation à longue portée. Nous ne retrouvons pas d'effet mémoire. La corrélation $C^{(2)}$ a été mesurée lors de plusieurs expériences : pour des systèmes optiques par le groupe d'Amsterdam [17] ainsi que par le groupe du professeur Maret [18] ; lors d'expériences de micro-ondes par le groupe du professeur Genack du Queens College (USA) [7, 19].

2.3.5 Calcul de $C^{(3)}$

De façon très schématique la contribution $C^{(3)}$ à la corrélation de l'intensité transmise vient d'un double mélange des diagrammes en échelle. Soit par la succession de deux vertex de Hikami $H^{(4)}$, similaires à celui calculé dans la section précédente, soit par le biais d'un nouveau vertex de Hikami, $H^{(6)}$ (voir figure 2.8) [3, 4, 5, 12]

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} = C_{\text{I}}^{(3)} + C_{\text{II}}^{(3)}.$$

Il y a plusieurs façons de connecter les diagrammes en échelle représentés par l'opérateur \mathcal{L} aux deux vertex de Hikami $H^{(4)}$ [12]. Néanmoins, et toujours très schématiquement, une première contribution à $C^{(3)}$ est donnée par

$$C_{\text{I}}^{(3)} \approx \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \mathcal{L} \mathcal{L} H^{(4)}(\mathbf{r}_1) \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta H^{(4)}(\mathbf{r}_2) \mathcal{L} \mathcal{L} \quad (2.14)$$

Les deux premiers propagateurs \mathcal{L} font diffuser les champs jusqu'au premier vertex de Hikami $H^{(4)}$ alors que \mathcal{L}_α et \mathcal{L}_β font le lien entre les deux vertex de Hikami. Finalement les deux derniers propagateurs font diffuser les champs jusqu'à l'interface de sortie.

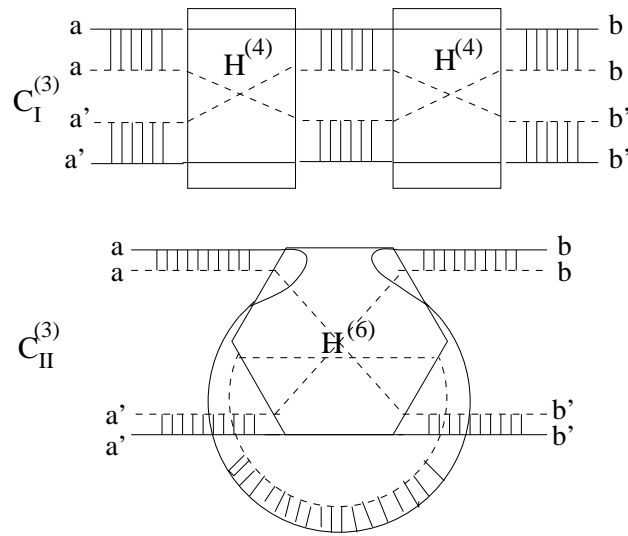


FIG. 2.8 - Représentation diagrammatique schématique des deux diagrammes donnant naissance au terme de corrélation $C^{(3)}$.

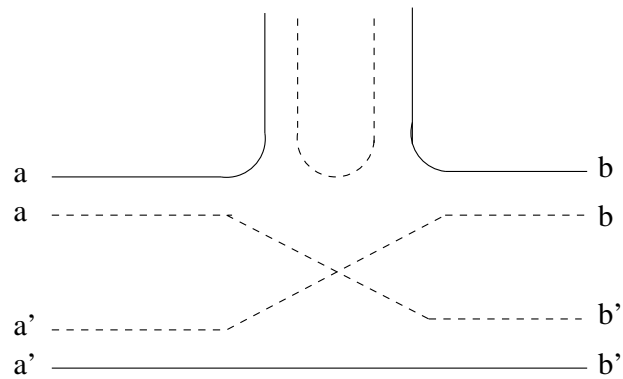


FIG. 2.9 - Un des diagrammes constituant le vertex de Hikami $H^{(6)}$.

Nous n'exposons pas la mécanique de $H^{(6)}$ qui est constitué, au premier ordre en perturbation, par 16 diagrammes [12], simplement nous montrons un de ces diagrammes en figure 2.9. Un calcul similaire à celui qui a conduit à la relation (2.9) de $H^{(4)}$ permet d'obtenir la relation suivante pour $H^{(6)}$ [5, 12]

$$H^{(6)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6) = \frac{-l^7}{96\pi k_0^4} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_5 \cdot \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_6 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2 + \mathbf{p}_5^2 + \mathbf{p}_6^2).$$

La deuxième contribution à $C^{(3)}$ est donnée par

$$C_{\text{II}}^{(3)} \approx \int d\mathbf{r}_1 \mathcal{L} \mathcal{L} H^{(6)}(\mathbf{r}_1) \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L} \mathcal{L}. \quad (2.15)$$

Les deux premiers propagateurs font diffuser les champs jusqu'au vertex de Hikami $H^{(6)}$. Le propagateur \mathcal{L}_α part et arrive sur le vertex de Hikami $H^{(6)}$. Finalement les deux derniers propagateurs font diffuser les champs jusqu'à l'interface de sortie.

Le calcul complet de $C^{(3)}$ est difficile et très technique aussi nous ne le détaillerons pas ici. Voici le résultat en fonction de la dimensionalité du système [5, 12]

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} = \left(\frac{1}{g_{scal}^0} \right)^2 \begin{cases} \frac{2}{15} & \text{quasi 1D,} \\ \frac{3}{\pi^3} \zeta(3) \frac{W}{L} & \text{quasi 2D,} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{W^2}{L^2} & \text{3D,} \end{cases} \quad (2.16)$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann.

Le terme de corrélation $C^{(3)}$ est un terme *constant* indépendant des directions des ondes incidentes et émergentes. Il n'y a pas de décorrélation ce qui fait de $C^{(3)}$ un terme de corrélation de portée infinie. C'est le terme le plus petit de la série $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ de $C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)}$ (2.2) dû au facteur $(1/g_{scal}^0)^2$, ce qui le rend particulièrement difficile à mesurer expérimentalement. La première mise en évidence expérimentale directe de $C^{(3)}$ dans un système optique est très récente et est due à l'équipe du professeur Maret [18]. Pour les systèmes électroniques, les fluctuations universelles de conductance, qui sont le reflet de la corrélation $C^{(3)}$ comme nous allons le voir dans la section suivante, ont été observés expérimentalement au milieu des années quatre vingt [20, 21]. Il est beaucoup plus facile d'observer les fluctuations universelles de conductance dans un système électronique que la corrélation $C^{(3)}$ en optique. La corrélation $C^{(3)}$ est difficile à séparer des deux termes $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$.

2.4 Résumé et interprétation physique

Dans cette section nous allons résumer les résultats des sections précédentes sur les fonctions de corrélation de l'intensité transmise à travers un milieu aléatoire et présenter leur interprétation physique. Nous avons défini la corrélation de l'intensité par

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} \equiv \frac{\langle \delta T_{k_a k_b} \delta T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle}{\langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle} \equiv C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)}. \quad (2.17)$$

Les sections 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5 nous ont permis d'arriver à l'expression

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} = \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L) + \frac{1}{g_{scal}^0} [F_2(\Delta q_a L) + F_2(\Delta q_b L)] + \left(\frac{1}{g_{scal}^0} \right)^2 F_3, \quad (2.18)$$

où les fonctions F_1 , F_2 et F_3 sont

$$F_1(x) = \frac{x^2}{\sinh^2 x}, \quad F_1(0) = 1, \quad F_1(x \rightarrow \infty) \sim x^2 e^{-2x}, \quad (2.19)$$

$$F_2(x) = \frac{\sinh 2x - 2x}{2x \sinh^2 x}, \quad F_2(0) = \frac{2}{3}, \quad F_2(x \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{x}, \quad (2.20)$$

$$F_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{15} & \text{quasi 1D,} \\ \frac{3}{\pi^3} \zeta(3) \frac{W}{L} & \text{quasi 2D,} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{W^2}{L^2} & \text{3D,} \end{cases} \quad (2.21)$$

et le coefficient g_{scal}^0

$$g_{scal}^0 = \frac{k_0^2 S l^*}{3\pi L} = \frac{4Nl^*}{3L}.$$

Il est important de noter que ces résultats sont le produit d'un développement perturbatif. Toutefois le calcul des termes suivants dans le développement n'engendre pas de nouvelles fonctions de corrélation $C^{(4)}$, $C^{(5)}$..., mais des corrections en puissance de $1/g_{scal}^0$ aux trois fonctions de corrélations $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ déjà existantes. On peut montrer que le facteur 1 devant la fonction F_1 est modifié par des corrections en $1/g_{scal}^0$ et en $(1/g_{scal}^0)^2$, alors que le facteur $1/g_{scal}^0$ de la fonction F_2 est modifié par un terme en $(1/g_{scal}^0)^2$ [7].

2.4.1 Interprétation physique des termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$

Nous voyons que c'est le terme $C^{(1)}$ qui domine les corrélations de l'intensité transmise (2.18), car la conductance moyenne est beaucoup plus grande que 1, $g_{scal}^0 \gg 1$. Ceci revient à dire que la fonction de corrélation $C^{(1)}$ décrit les corrélations de l'intensité d'une onde acoustique transmise à travers un milieu hétérogène. De plus, si nous posons $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{a'}$

et $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_{b'}$, il vient

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{k_a k_b}^2 \rangle &\approx \langle T_{k_a k_b} \rangle^2 C_{k_a=k_{a'}, k_b=k_{b'}}^{(1)}, \\ &\approx \langle T_{k_a k_b} \rangle^2. \end{aligned}$$

Nous voyons que les fluctuations du coefficient de transmission $T_{k_a k_b}$ sont du même ordre de grandeur que le coefficient de transmission moyen $\langle T_{k_a k_b} \rangle$. C'est exactement la description d'une figure de tavelure où, d'un point à l'autre de l'écran, l'intensité fluctue énormément.

Pour obtenir les corrélations du coefficient de transmission totale

$$\delta T_{k_a} = \sum_{k_b} (T_{k_a k_b} - \langle T_{k_a k_b} \rangle),$$

il est nécessaire de sommer (2.17) sur les directions \mathbf{k}_b et $\mathbf{k}_{b'}$

$$\langle \delta T_{k_a} \delta T_{k_{a'}} \rangle = \sum_{k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle \left[C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} \right].$$

Étant donné la forme de $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ et la relation $\langle T_{k_a k_b} \rangle = 4l^*/3NL$ (relation (2.8)) il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} &\approx \left(\frac{l^*}{L} \right)^2 \frac{F_1(\Delta q_a L)}{N}, \\ \sum_{k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} &\approx \frac{l^*}{L} \frac{F_2(\Delta q_a L)}{N}, \\ \sum_{k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} &\approx \frac{1}{N^2}. \end{aligned}$$

Il apparaît que le terme $\sum_{k_b, k_{b'}} C^{(2)}$ est le terme dominant parmi les trois car $L \gg l$ et $N \gg 1$. C'est pour cela que l'on dit que la fonction de corrélation $C^{(2)}$ détermine les corrélations du coefficient de transmission total T_{k_a} [5]. En posant $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{a'}$ nous accédons aux fluctuations de T_{k_a} autour de sa valeur moyenne $\langle T_{k_a} \rangle$

$$\frac{\langle \delta T_{k_a}^2 \rangle}{\langle T_{k_a} \rangle^2} \approx \frac{1}{g_{scal}^0}.$$

Finalement, en sommant sur les directions incidentes et émergentes des ondes nous obtenons les fluctuations de la conductance du système $T = \sum_{k_a, k_b} T_{k_a k_b}$

$$\langle (\delta T)^2 \rangle = \sum_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle \left[C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} + C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} \right].$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(1)} &\approx \left(\frac{l^*}{L} \right)^2, \\ \sum_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(2)} &\approx \frac{l^*}{L}, \\ \sum_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}} \langle T_{k_a k_b} \rangle \langle T_{k_{a'} k_{b'}} \rangle C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)} &\approx 1. \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\langle (\delta T)^2 \rangle \approx 1,$$

ce qui correspond à la description des fluctuations universelles de conductance (UCF). Les fluctuations universelles de conductance sont dues au terme $C^{(3)}$ qui est, paradoxalement, le plus petit de la série (2.17). Cela est dû au fait que le terme de corrélation $C^{(3)}$ est constant à la différence des termes de corrélation $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ qui, suite à leurs règles de sélection, dépendent fortement des directions des ondes, et sont par conséquent minoritaires lors de la somme sur k_a , $k_{a'}$, k_b et $k_{b'}$ [3, 4, 5].

2.5 Influence de l'absorption

Lors de nombreuses expériences, tout particulièrement avec des micros-ondes, il est impossible de négliger la présence d'absorption. Il est par conséquent important de connaître son influence sur les propriétés de transport présentées dans les sections précédentes. Le traitement qui suit se limite à l'influence de la longueur d'absorption L_a et ne recouvre pas l'influence de la longueur de cohérence L_ϕ , qui est due à des mécanismes complètement différents.

Tant que la longueur d'absorption L_a est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen l^* , $L_a \gg l^*$, il est toujours possible de penser en terme de diffusions multiples. Dans cette limite, l'influence de l'absorption est de modifier la forme du propagateur défini en (2.4), qui est alors solution de l'équation [3, 5, 12],

$$\left(-\Delta + \frac{1}{L_a^2} \right) \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{12\pi}{l^{*3}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Pour la géométrie de la tranche, la solution est,

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \mathbf{p} \frac{12\pi}{l^{*3}} \frac{\sinh(M(L - z_>)) \sinh(Mz_<)}{M \sinh(pL)} e^{i(\rho_1 - \rho_2) \cdot \mathbf{p}},$$

où $M = \sqrt{\Delta q_a^2 + 1/L_a^2}$, $z_> = \max(z_1, z_2)$ et $z_< = \min(z_1, z_2)$. Le corrélateur des champs $\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle_{abs}$ prend donc la forme [3, 5, 12]

$$\langle t_{k_a k_b} t_{k_a' k_b'}^* \rangle_{abs} = \frac{16\pi l^*}{3k_0^2 SL} \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} \left(\frac{ML}{\sinh ML} \right)^2. \quad (2.22)$$

2.5.1 Transmission et conductance

Si nous posons $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{a'}$ et $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_{b'}$ alors $M = 1/L_a$ et nous obtenons le coefficient de transmission de l'intensité en présence d'absorption $\langle T_{k_a k_b}^{abs} \rangle = \langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle_{abs}$,

$$\langle T_{k_a k_b}^{abs} \rangle = \left(\frac{L/L_a}{\sinh L/L_a} \right) \langle T_{k_a k_b} \rangle,$$

où $\langle T_{k_a k_b} \rangle$ est le coefficient de transmission de l'intensité en absence d'absorption qui est donné par la relation (2.8) [3, 5, 6, 7, 12]. Le coefficient de transmission total et la conductance moyenne du système se déduisent de $\langle T_{k_a k_b}^{abs} \rangle$ en sommant respectivement sur les directions incidentes k_a et émergentes k_b ,

$$\begin{aligned} \langle T_{k_a} \rangle &= \sum_{k_b} \langle T_{k_a k_b}^{abs} \rangle = \left(\frac{L/L_a}{\sinh L/L_a} \right) \langle T_{k_a} \rangle, \\ g_{scal}^{abs} &= \sum_{k_a, k_b} \langle T_{k_a k_b}^{abs} \rangle = \left(\frac{L/L_a}{\sinh L/L_a} \right) g_{scal}^0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que toutes ces quantités de transport décroissent exponentiellement avec la longueur l'absorption L_a lorsque $L_a \gg L$.

2.5.2 $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ en présence d'absorption

Il est maintenant aisé d'exprimer l'influence de l'absorption sur le terme $C^{(1)}$ [3, 5, 6, 7, 12],

$$C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}^{(1)} = |\langle T_{k_a k_b} T_{k_a' k_b'}^* \rangle_{abs}|^2 / (\langle T_{ab}^{abs} \rangle \langle T_{a'b'}^{abs} \rangle), \quad (2.23)$$

$$= \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L, L/L_a), \quad (2.24)$$

avec

$$F_1(x, \beta) = \frac{\sinh^2 \beta}{\beta^2} \frac{x^2 + \beta^2}{\sinh^2 \sqrt{x^2 + \beta^2}}, \quad x = \Delta q_a L, \quad \beta = \frac{L}{L_a}. \quad (2.25)$$

On remarque que $C_{k_a=k_a', k_b=k_b'}^{(1)} = 1$ quelle que soit la longueur d'absorption L_a . La fonction F_1 est représentée, pour différentes valeur du rapport L/L_a , en fonction de l'argument

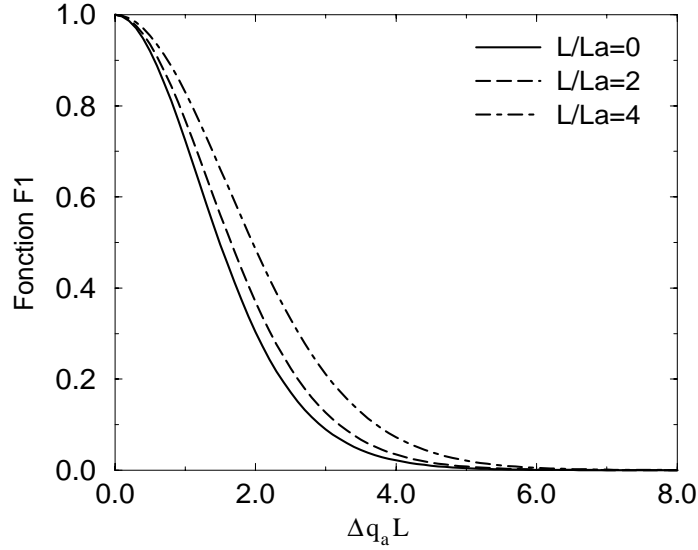


FIG. 2.10 - Représentation graphique de la fonction F_1 en fonction de l'argument $\Delta q_a L$, pour différentes valeurs du rapport L/L_a .

$\Delta q_a L$ sur la figure 2.10. Même pour des absorptions relativement fortes, la forme de la fonction F_1 est peu modifiée et elle tend simplement à s'élargir.

Nous ne détaillerons pas ici le calcul de la fonction de corrélation $C^{(2)}$, cependant il est possible de montrer que $C^{(2)}$ devient [6, 12]

$$C_{k_a, k_a', k_b, k_b'}^{(2)abs} = \frac{1}{g_{scal}^0} [F_2(\Delta q_a L, L/L_a) + F_2(\Delta q_b L, L/L_a)],$$

où la fonction F_2 est donnée par

$$F_2(x, \beta) = \frac{1}{2 \sinh^2 a} \left[\frac{2a^2 - \beta^2}{2a(a^2 - \beta^2)} \sinh(2a) - \frac{a^2}{2\beta(a^2 - \beta^2)} \sinh(2\beta) - 1 \right], \quad (2.26)$$

avec $a = \sqrt{x^2 + \beta^2}$, $\beta = L/L_a$ et $x = \Delta q_{a,b} L$. Pour $x = 0$, F_2 prend la forme suivante

$$F_2(0, \beta) = \frac{4\beta \sinh^2 \beta - 2\beta + \sinh 2\beta}{4\beta \sinh^2 \beta},$$

$$F_2(0, 0) = \frac{2}{3}, \quad F_2(0, \beta \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}.$$

La fonction F_2 est représentée en fonction de l'argument $\Delta q_a L$ pour différentes valeurs du rapport L/L_a , sur la figure 2.11. Notons que $F_2(\Delta q_a L = 0, L/L_a)$ varie peu avec l'absorption.

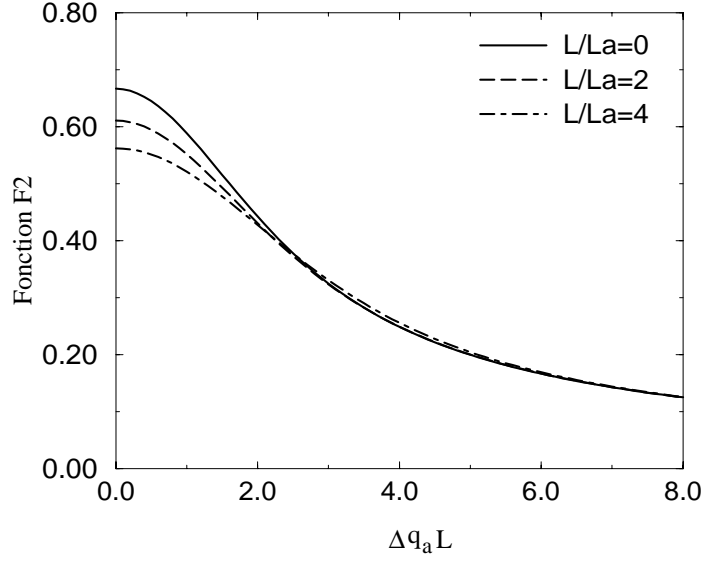


FIG. 2.11 - Représentation graphique de la fonction F_2 pour différentes valeurs du rapport L/L_a en fonction de l'argument $\Delta q_a L$.

A l'heure actuelle il existe deux calculs indépendants, et donnant un résultat analytique, de l'effet de l'absorption sur le terme $C^{(3)}$ dans le cas d'un milieu quasi 1D. Le premier, basé sur la théorie des matrices aléatoires est due à P. Brouwer [22]. Le second, basé sur des techniques diagrammatiques est dû à R. Pnini [23]. Ces deux calculs arrivent à des conclusions différentes même s'ils coïncident pour les cas limites d'absence d'absorption ou au contraire d'absorption très forte. Les raisons de cette différence ne sont pas encore bien comprises, mais il ne faut pas oublier que les hypothèses de la théorie des matrices aléatoires et des techniques diagrammatiques ne sont pas les mêmes. Dans les deux cas $C^{(3)}$ s'écrit comme

$$C_{k_a, k_{a'}, k_b, k_{b'}}^{(3)abs} = \left(\frac{1}{g_{scal}^0} \right)^2 F_3(L/L_a), \quad (2.27)$$

avec F_3 dans la géométrie quasi 1D,

$$F_3(\beta) = \begin{cases} \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right)^2 \frac{\operatorname{csch}^6 \beta}{256} [75 + 60\beta^2 + (-64 + 16\beta^2 + 72\beta) \cosh \beta + (-11 + 6\beta + 4\beta^2) \cosh 4\beta] & \text{Pnini,} \\ \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right)^2 \frac{\operatorname{csch}^6 \beta}{128} [15 + 42\beta^2 + (-16 + 4\beta^2 - 10\beta) \cosh \beta + (1 - \beta + 2\beta^2) \cosh 4\beta] & \text{Brouwer,} \end{cases} \quad (2.28)$$

Ces deux fonctions, qui ont les mêmes limites, $F_3(0) = 2/15$ et $F_3(\infty) = 1/8$, sont représentées sur la figure 2.12. A nouveau, on remarque que l'absorption influence relativement

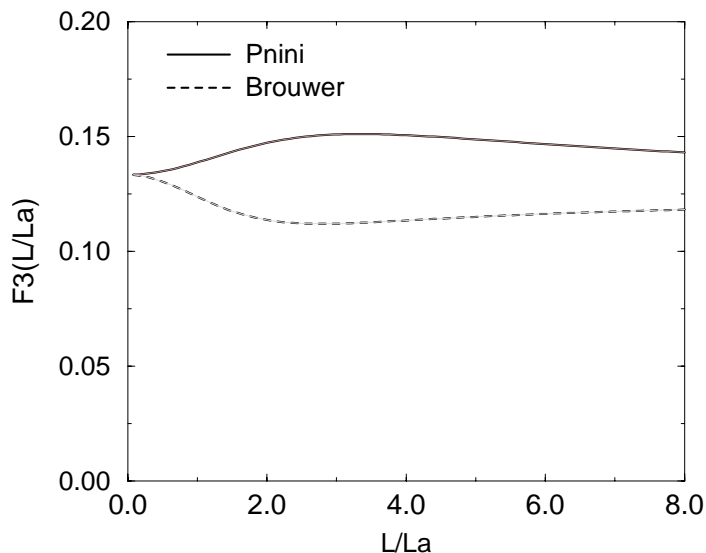


FIG. 2.12 - Représentation graphique de la fonction F_3 en fonction de L/L_a . La courbe en traits pleins est le résultat de R. Pnini utilisant des techniques diagrammatiques alors que la courbe en pointillé basée sur la théorie des matrices aléatoires est due à P. Brouwer.

peu le terme de corrélation $C^{(3)}$, puisque la fonction F_3 varie au plus de 15% de sa valeur sans absorption (2/15).

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté l'étude des propriétés de transport d'une onde acoustique à travers un milieu linéaire multiplement diffusant, absorbant ou non. Cela nous a amené à introduire différents coefficients de transmission ainsi que leurs fonctions de corrélations respectives.

La fonction de corrélation de l'intensité transmise est dominée par le terme dit $C^{(1)}$. Le terme $C^{(1)}$ possède ce qui a été appelé l'effet mémoire: si l'on change la direction de l'onde incidente sur le milieu, la figure de tavelure est déplacée du même angle. La décroissance de la corrélation $C^{(1)}$ varie exponentiellement en fonction de l'angle formé par les deux faisceaux incidents ou émergents.

La fonction de corrélation du coefficient de transmission totale est donnée par la fonction de corrélation $C^{(2)}$. Sa décroissance est algébrique avec l'angle formé par les directions de propagation des deux ondes incidentes.

Finalement les fluctuations de la conductance du système sont liées à la fonction de corrélation $C^{(3)}$. Celles-ci permettent de comprendre la propriété étonnante des systèmes mésoscopiques que sont les fluctuations universelles de conductance (UCF). Cette propriété s'explique par le fait qu'il existe toujours une corrélation entre deux intensités transmises quelles que soient les directions des faisceaux incidentes et émergentes

Dans le chapitre suivant, qui regroupe les principaux résultats de la première partie de ce mémoire, nous allons étudier le transport d'une onde électromagnétique à travers un milieu linéaire multiplement diffusant. A la différence d'une onde acoustique, une onde électromagnétique possède deux états de polarisation. Il s'agit d'étudier la dépendance des différentes quantités de transport en fonction de la polarisation. Nous verrons que ces nouveaux degrés de liberté engendrent des règles de sélection très intéressantes des termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$, et qu'il sera possible d'accéder directement à la fonction de corrélation $C^{(3)}$, qui est le coeur des fluctuations universelles de conductance.

Bibliographie

- [1] J. Dainty. *Laser Speckle and Related Phenomena*. Springer–Verlag, second edition, 1984.
- [2] P. Sheng. *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*. Academic Press, INC., 1995.
- [3] R. Berkovits et S. Feng. Correlations in coherent multiple scattering. *Phys. Rep.*, 238:135, 1994.
- [4] S. Feng C. Kand P. A. Lee et A. D. Stone. Correlations and fluctuations of coherent wave transmission through disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 61:834, 1988.
- [5] M. van Rossum et Th. Nieuwenhuizen. Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy and diffusion. *Rev. Mod. Phys.*, 71(1):313, 1999.
- [6] R. Pnini et B. Shapiro. Intensity correlation in absorbing random media. *Phys. Lett. A.*, 157:265, 1991.
- [7] N. Garcia A. Genack R. Pnini et B. Shapiro. Intensity correlation in waveguides. *Phys. Lett. A.*, 157:265, 1991.
- [8] J. de Boer. *Optical fluctuations on the transmission and reflection of mesoscopic media*. PhD thesis, Université D'Amsterdam, 1995.
- [9] U. Frisch. *Probabilistic methods in applied mathematics*, page 75. Academic, New-York, 1968.
- [10] P. Sebbah, editor. *Coherent Multiple Scattering in Disordered Media*, page 29. Kluwer Academic Publishers, 2001.

- [11] B. Shapiro. Large intensity fluctuations for wave propagation in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2168, 1986.
- [12] M. van Rossum. *Mesoscopic phenomena in multiple light scattering*. PhD thesis, Université D'Amsterdam, 1995.
- [13] Th. Nieuwenhuizen et J.M. Luck. Skin layer of diffusive media. *Phys. Rev. E.*, 48:569, 1993.
- [14] I. Freund M. Rosenbluh et S. Feng. Memory effects in propagation of optical waves through disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2328, 1988.
- [15] I. Freund M. Rosenbluh et R. Berkovits. Geometric scaling of the optical memory effect in coherent-wave propagation through random media. *Phys. Rev. B.*, 39:12403, 1989.
- [16] S. Hikami. Anderson localization in a nonlinear- σ -model representation. *Phys. Rev. B.*, 24:2671, 1981.
- [17] M. van Albada J. de Boer et A. Lagendijk. Observation of long-range intensity correlation in the transport of coherent light through a random medium. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2787, 1990.
- [18] F. Scheffold et G. Maret. Universal conductance fluctuations of light. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5800, 1998.
- [19] A. Genack W. Polkosnik et N. Garcia. Long-range intensity correlation in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2129, 1990.
- [20] R. Webb S. Washburn C. Umbach et R. Laibowitz. Observation of h/e aharonov-bohm oscillations in normal-metal rings. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2696, 1985.
- [21] J. Licini D. Bishop M. Kastner et J. Melngailis. Aperiodic magnetoresistance oscillations in narrow inversion layers in *si*. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2987, 1985.
- [22] P. Brouwer. Transmission through a many-channel random waveguide with absorption. *Phys. Rev. B.*, 57:10526, 1998.
- [23] P. Sebbah, editor. *Correlation of Speckle in Random Media*, page 391. Kluwer Academic Publishers, 2001.

Chapitre 3

Transport cohérent d'une onde électromagnétique à travers un milieu aléatoire

3.1 Introduction

Depuis environ 15 ans, un travail de recherche très important a été réalisé dans l'étude et la compréhension de la propagation des ondes électromagnétiques à travers des milieux hétérogènes linéaires. Que ce soit pour des applications à la “diffusing-wave spectroscopy” (DWS) [1], pour l'étude du cône de rétrodiffusion cohérent [2], dans le domaine de la diffusion multiple de la lumière sous champ magnétique [3] et actuellement dans des milieux chiraux, toutes ces études montrent qu'il n'est pas possible de modéliser, même approximativement, la lumière par une onde scalaire. Une telle approximation ne permet pas d'accéder à des phénomènes aussi étonnants que la destruction du cône de rétrodiffusion cohérent par un champ magnétique [4] ou l'effet Hall photonique [5].

Dans le régime mésoscopique faiblement désordonné, l'étude des propriétés de transport d'une onde électromagnétique, prenant rigoureusement en compte les effets de polarisation, a été peu étudiée. Ainsi il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie décrivant les fluctuations universelles de conductance pour la lumière. Ce chapitre est dédié à cette étude.

Le transport d'une onde électromagnétique polarisée à travers un milieu aléatoire étant

particulièrement technique, il est plus judicieux, au lieu de reprendre les calculs à la base, de souligner et de prendre en compte les différences entre le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques et le caractère scalaire des ondes acoustiques. Aussi, après avoir défini les notations de la fonction de corrélation de l'intensité transmise nous développerons les différentes quantités vectorielles nécessaires : fonction de Green, diagramme en échelle..., au calcul de cette fonction de corrélation. Ceci nous permettra de déterminer directement les coefficients de transmission et la fonction de corrélation $C^{(1)}$. La généralisation des fonctions de corrélation $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ nécessite en revanche de recalculer les vertex de Hikami pour le cas d'une onde vectorielle. Cette partie, particulièrement technique, est reléguée en annexe A. Les résultats finaux sont simples et ne bouleversent pas la structure de la fonction de corrélation scalaire décrite au chapitre 2. Au contraire, nous verrons que la polarisation apporte aux fonctions de corrélation $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ des règles de sélection très intéressantes.

3.2 Fonction de corrélation de l'intensité transmise

Nous nous intéressons à la transmission d'une onde électromagnétique polarisée à travers un milieu hétérogène de surface $S = W \times W$ et de longueur L . Soit une onde incidente de direction \mathbf{k}_a dans l'état de polarisation linéaire a et émergente avec la direction \mathbf{k}_b et l'état de polarisation linéaire b (figure 3.1). Pour alléger les notations, les indices a et b représenteront indistinctement les états de polarisation linéaire du champ électrique aussi bien que le canal défini par la polarisation et la direction de propagation de l'onde : $a = \{\text{polarisation}, \mathbf{k}_a\}$. Ainsi lorsque nous notons le coefficient de transmission de l'intensité par $T_{ab} = I(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)/I_0$, où I_0 est l'intensité de l'onde incidente, nous parlons du coefficient de transmission d'une onde électromagnétique incidente avec la direction \mathbf{k}_a dans l'état de polarisation linéaire a vers une onde transmise dans la direction \mathbf{k}_b et l'état de polarisation linéaire b (voir figure 3.1).

Introduisons maintenant la fonction de corrélation,

$$C_{a,a',b,b'} = \frac{\langle \delta T_{ab} \delta T_{a'b'} \rangle}{\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle}, \quad (3.1)$$

où $\delta T_{ab} = T_{ab} - \langle T_{ab} \rangle$, $\delta T_{a'b'} = T_{a'b'} - \langle T_{a'b'} \rangle$ et où $\langle \dots \rangle$ dénote la moyenne sur les réalisations du désordre. La fonction de corrélation $C_{a,a',b,b'}$ contient de nombreuses informations puisqu'elle dépend aussi bien de l'état de polarisation des ondes que de leurs directions respectives. Dans les sections suivantes nous allons étudier particulièrement

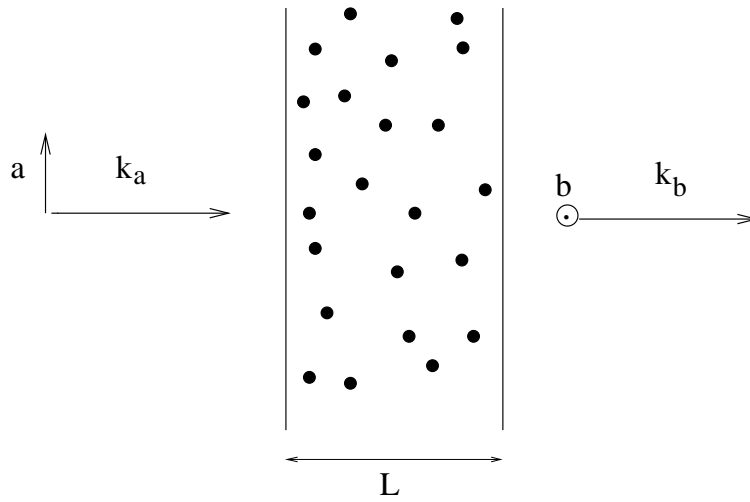


FIG. 3.1 - Transmission d'une onde électromagnétique polarisée incidente avec la direction \mathbf{k}_a et la polarisation linéaire a et émergente dans la direction \mathbf{k}_b et l'état de polarisation b .

l'influence de l'état de polarisation des ondes sur les coefficients de transmission $\langle T_{a,b} \rangle$ et la fonction de corrélation $C_{a,a',b,b'}$.

Le coefficient de transmission T_{ab} est donné par le produit du coefficient de transmission du champ électrique t_{ab} et de son complexe conjugué t_{ab}^* , $T_{ab} = t_{ab}t_{ab}^*$. Le coefficient de transmission du champ électrique est défini par

$$t_{ab} = \frac{E_b(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)}{E_0},$$

où E_b est la composante selon la direction de polarisation linéaire b du champ électrique \mathbf{E} émergent du milieu dans la direction de propagation \mathbf{k}_b . L'onde incidente a pour amplitude E_0 et est polarisée selon la polarisation linéaire a . En appliquant les mêmes méthodes qu'au chapitre précédent, la corrélation $\langle T_{ab}T_{a'b'} \rangle$ se décompose en trois termes [6]

$$\langle T_{ab}T_{a'b'} \rangle = \langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle + |\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle|^2 + \Gamma_4(t_{ab}, t_{ab}^*, t_{a'b'}, t_{a'b'}^*),$$

ce qui nous permet de séparer la fonction de corrélation $C_{a,a',b,b'}$ suivant

$$\begin{aligned} C_{a,a',b,b'} &\equiv \frac{\langle \delta T_{ab} \delta T_{a'b'} \rangle}{\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle}, \\ &\equiv \frac{|\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle|^2}{\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle} + \frac{\Gamma_4(t_{ab}, t_{ab}^*, t_{a'b'}, t_{a'b'}^*)}{\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle}, \\ &\equiv C_{a,a',b,b'}^{(1)} + C_{a,a',b,b'}^{(2)} + C_{a,a',b,b'}^{(3)}. \end{aligned}$$

La fonction $C^{(1)}$ est définie par le rapport de $|\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle|^2$ sur $\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle$ alors

que le ratio $\Gamma_4(t_{ab}, t_{ab}^*, t_{a'b'}, t_{a'b'}^*)$ sur $\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle$ est décomposé en deux fonctions $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ de façon identique au cas scalaire.

3.3 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique hétérogène

La propagation d'une onde électromagnétique à travers un milieu diélectrique aléatoire linéaire est décrite par les équations de Maxwell [7]

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, & \mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide. En prenant le rotationnel du rotationnel du champ électrique et en le combinant avec l'expression du rotationnel du champ magnétique, nous arrivons à l'équation de Helmholtz [7] qui est l'équation d'onde du champ électrique,

$$-\frac{\epsilon(\mathbf{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Nous supposons par la suite que l'indice de réfraction du milieu $\epsilon(\mathbf{r})$ s'écrit sous la forme $\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \mu(\mathbf{r})$, le terme $\mu(\mathbf{r})$ décrivant les fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction. Pour un champ électrique monochromatique de pulsation ω_0 , l'équation de Helmholtz devient

$$k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))\mathbf{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

La description complète du milieu aléatoire repose sur la spécification des propriétés statistiques de $\mu(\mathbf{r})$. Nous supposons, comme nous l'avons fait au chapitre 2, que $\mu(\mathbf{r})$ obéit à une statistique de bruit blanc Gaussien

$$\begin{aligned} \langle \mu(\mathbf{r}) \rangle &= 0, \\ k_0^4 \langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle &= \gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

le symbole $\langle \dots \rangle$ marquant le moyenne sur les réalisations du désordre. Nous rappelons que la statistique de bruit blanc Gaussien est équivalente à une collection de diffuseurs de Rayleigh aléatoirement répartis dans le milieu [8], et que par conséquent il n'y a pas de différence entre le libre parcours moyen l et le libre parcours moyen de transport l^* .

3.3.1 Fonction de Green moyenne

Il est plus aisé de déterminer la fonction de Green de l'équation de Helmholtz en espace de Fourier. Considérons dans un premier temps la fonction de Green pour un milieu homogène $\mu(\mathbf{r}) = 0$. En utilisant l'égalité bien connue

$$\mathbf{rot rot} = \mathbf{grad div} - \Delta,$$

la fonction de Green retardée du milieu homogène s'écrit [3, 9]

$$g_{ij}^0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_0^2} \right) \frac{1}{k^2 - k_0^2 + i0}.$$

Étant donné le caractère vectoriel du champ électrique, la fonction de Green est un tenseur de rang 2. Il est courant de trouver la fonction de Green écrite sous la forme suivante [3, 9, 10]

$$g_{ij}^0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\frac{-\hat{k}_i \hat{k}_j}{k_0^2} + \frac{\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j}{k^2 - k_0^2 + i0} \right), \quad (3.2)$$

\hat{k}_i étant la composante i du vecteur normé $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. La partie $-\hat{k}_i \hat{k}_j/k_0^2$ de la fonction de Green (3.2) est un terme longitudinal qui correspond à des effets de champ proche et qui ne se propage pas [9]. Pour cette raison elle est souvent négligée mais elle peut jouer un rôle crucial, lors de diffusions multiples de la lumière sous champ magnétique par exemple [3, 4, 10]. Dans les calculs qui suivent nous allons garder ce terme car il permet de simplifier les calculs du vertex de Hikami. Le terme $(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j)/(k^2 - k_0^2 + i0)$ correspond à la partie transverse propagative de la fonction de Green [1, 9, 11, 12].

La fonction de Green moyenne $G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle$ en présence de désordre s'obtient par les mêmes techniques perturbatives qui nous ont permis d'obtenir la fonction de Green moyenne dans le cas d'une onde scalaire [6, 9]

$$G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_0^2} \right) G(k), \quad (3.3)$$

avec

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - \nu^2}, \quad \nu^2 = k_0^2 + ik_0/l.$$

Le libre parcours moyen l est relié aux fluctuations de l'indice de réfraction $\mu(\mathbf{r})$ par la relation $\gamma = 6\pi/l$ [1, 3, 9, 10, 11, 12]. Il est important de noter que la relation entre le libre parcours moyen d'une onde électromagnétique et les fluctuations de l'indice de réfraction diffère d'un facteur 2/3 du cas scalaire [13, 14]. Ceci provient du caractère vectoriel du champ électromagnétique et cette différence se retrouve dans l'expression du théorème optique [9].

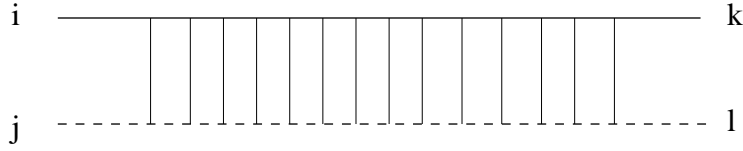


FIG. 3.2 - Représentation diagrammatique de la propagation de l'intensité diffuse à travers le milieu multiplement diffusant. Le champ est représenté en traits pleins alors que le champ complexe conjugué est représenté en pointillés.

3.3.2 Propagateur de l'intensité diffuse

Après avoir déterminé la fonction de Green moyenne du système, nous allons maintenant nous attacher à décrire la propagation de l'intensité diffuse à travers un milieu aléatoire. Il s'agit de prendre en compte, lors des successions de diffusions, l'état de polarisation des ondes émergentes k et l sachant que les ondes incidentes ont les polarisations i et j (figure 3.2).

Un raisonnement similaire à celui effectué au chapitre 2 montre que le propagateur de l'énergie diffuse \mathcal{L} est donné par les diagrammes en échelle. De même, le propagateur \mathcal{L} n'est pas une fonction des quatre variables \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 et \mathbf{r}_4 , mais est seulement fonction de \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 ,

$$\mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4),$$

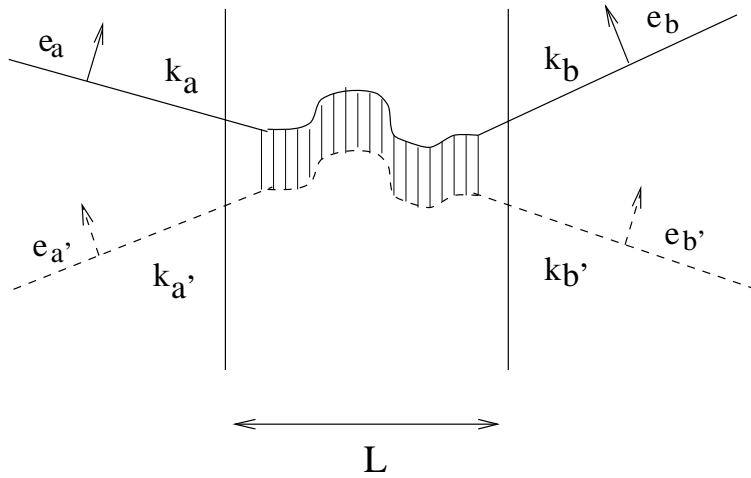
Dans un milieu infini et pour une statistique de bruit blanc Gaussien, on montre que la transformée de Fourier, $\mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{q})$, de $\mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ prend la forme [1, 3, 10, 11, 12]

$$\mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{q}) = \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{2}\mathcal{L}(\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(\mathbf{q}) = \frac{12\pi}{l^*3q^2}. \quad (3.4)$$

L'expression de $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ est identique à celle du cas scalaire. Le propagateur de l'énergie diffuse \mathcal{L}_{ijkl} est le produit du tenseur $\delta_{ij}\delta_{kl}/2$, qui décrit les états de polarisation, et de la fonction $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ qui est la partie propagative proprement dite. Physiquement, le terme $\delta_{ij}\delta_{kl}$ exprime que les successions de diffusions rendent totalement indépendants les états de polarisation “entrants” et “sortants”. La diffusion multiple dépolarise la lumière.

La forme factorisée (3.4) permet de déterminer immédiatement l'expression du propagateur pour la géométrie d'une tranche. Le propagateur \mathcal{L}_{ijkl} est le produit du tenseur $\delta_{ij}\delta_{kl}/2$ et de la fonction scalaire $\mathcal{L}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2)$ que nous avons donnée au chapitre 2 [13, 15],

$$\mathcal{L}_{ijkl}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2) = \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{2}\mathcal{L}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2),$$

FIG. 3.3 - Description graphique du corrélateur $\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle$.

avec

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{p} \frac{12\pi \sinh(p(L - z_>)) \sinh(pz_<)}{l^{*3} p \sinh(pL)} e^{i(\rho_1 - \rho_2) \cdot \mathbf{p}},$$

où $z_> = \max(z_1, z_2)$ et $z_< = \min(z_1, z_2)$.

Nous pouvons maintenant déterminer l'expression du corrélateur $\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle$. Le corrélateur $\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle$ s'obtient en attachant à \mathcal{L}_{ijkl} , qui décrit la propagation de l'énergie diffuse dans le milieu, les champs électriques incidents \mathbf{E}_a , $\mathbf{E}_{a'}$ et émergents \mathbf{E}_b , $\mathbf{E}_{b'}$ (voir figure 3.3). A la différence du cas d'une onde scalaire, il faut contracter les indices i, j, k et l de \mathcal{L}_{ijkl} avec les composantes i du vecteur \mathbf{E}_a , j du vecteur $\mathbf{E}_{a'}$, k du vecteur \mathbf{E}_b et l du vecteur $\mathbf{E}_{b'}$. Ainsi si nous appelons \mathbf{e}_a , $\mathbf{e}_{a'}$, \mathbf{e}_b et $\mathbf{e}_{b'}$ les vecteurs unitaires décrivant la direction des vecteurs champ électrique, la partie tensorielle $\delta_{ij}\delta_{kl}/2$ de \mathcal{L}_{ijkl} donne les produits scalaires $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_{a'}$ et $\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_{b'}$. En d'autres termes le corrélateur $\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle$ est donné par la relation

$$\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle = \frac{(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_{a'}) (\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_{b'})}{2} \langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle,$$

où $\langle t_{k_a k_b} t_{k_a k_b}^* \rangle$ est le corrélateur obtenu pour une onde acoustique et donné par la relation (2.6). Dans la suite de ce chapitre nous noterons $\delta_{a,a'} \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_{a'}$ et $\delta_{b,b'} \equiv \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_{b'}$. Ainsi il vient

$$\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle = \frac{\delta_{a,a'} \delta_{b,b'}}{2} \frac{16\pi}{3k_0^2 S} \delta_{\Delta\mathbf{q}_a, \Delta\mathbf{q}_b} \frac{\sinh^2 \Delta q_a l^*}{\Delta q_a l^* \sinh \Delta q_a L}, \quad (3.5)$$

qui se réduit, pour les petites valeurs de $\Delta q_a l^*$, à

$$\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle = \frac{\delta_{a,a'} \delta_{b,b'}}{2} \frac{16\pi l^*}{3k_0^2 S L} \delta_{\Delta\mathbf{q}_a, \Delta\mathbf{q}_b} \frac{\Delta q_a L}{\sinh \Delta q_a L}.$$

3.3.3 Coefficients de transmission et conductance

Si les canaux d'entrées et de sorties sont égaux, $a \parallel a'$ et $b \parallel b'$, le corrélateur des champs (3.5) correspond au coefficient de transmission de l'intensité $\langle T_{ab} \rangle$ à travers le milieu. Il ne faut pas oublier que, à cause des deux états de polarisation du champ électrique, le nombre de modes supporté par le système est le double du cas scalaire: $N_{pol} = 2k_0^2 S/4\pi$ [16], ainsi

$$\langle T_{ab} \rangle = \frac{8\pi l^*}{3k_0^2 SL} = \frac{4l^*}{3N_{pol}L}. \quad (3.6)$$

Le coefficient de transmission total ainsi que la conductance moyenne g_{pol}^0 s'obtiennent en sommant sur tous les canaux (polarisation incluse) entrants et sortants,

$$\langle T_a \rangle = \sum_b \langle T_{ab} \rangle = \frac{4l^*}{3L} \quad (3.7)$$

$$g_{pol}^0 = \sum_{a,b} \langle T_{ab} \rangle = 2g_{scal}^0, \quad \text{avec} \quad g_{scal}^0 = \frac{k_0^2 SL^*}{3\pi L}. \quad (3.8)$$

Les degrés de liberté de polarisation font que la conductance du système diffère d'un facteur 2 de la conductance calculée pour une onde scalaire.

3.3.4 Fonction de corrélation $C^{(1)}$

A partir de l'expression de $\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle$ donnée par la relation (3.5), il est facile de déterminer l'expression du terme de corrélation $C^{(1)}$

$$C_{a,a',b,b'}^{(1)} = |\langle t_{ab}t_{a'b'}^* \rangle|^2 / (\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle) \quad (3.9)$$

$$= \delta_{aa'}^2 \delta_{bb'}^2 \delta_{\Delta\mathbf{q}_a, \Delta\mathbf{q}_b} \left(\frac{L}{l^*}\right)^2 \left(\frac{\sinh^2 \Delta q_a l^*}{\Delta q_a l^* \sinh \Delta q_a L}\right)^2. \quad (3.10)$$

Pour de petits angles d'incidence, $\Delta q_a l^* \ll 1$, l'expression de $C^{(1)}$ se simplifie en

$$C_{a,a',b,b'}^{(1)} = \delta_{aa'}^2 \delta_{bb'}^2 \delta_{\Delta\mathbf{q}_a, \Delta\mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L), \quad (3.11)$$

où la fonction F_1 est

$$F_1(x) = \frac{x^2}{\sinh^2 x}, \quad F_1(0) = 1, \quad F_1(x \rightarrow \infty) \rightarrow x^2 e^{-2x}, \quad (3.12)$$

qui est représentée sur la figure 2.5. La dépendance de $C^{(1)}$ vis à vis des états de polarisation des ondes est concentrée dans le produit de deux fonctions delta $\delta_{aa'}\delta_{bb'}$ et ainsi

si l'on considère la corrélation entre les mêmes états de polarisation entrant et sortant, c'est-à-dire $a \parallel a'$ et $b \parallel b'$, nous retrouvons la forme fonctionnelle de la corrélation $C^{(1)}$ scalaire. En revanche, si les polarisations sont croisées, $a \perp a'$ ou $b \perp b'$, alors le terme $C^{(1)}$ devient rigoureusement nul. Nous voyons que l'aspect vectoriel des ondes électromagnétiques apporte une contribution supplémentaire très intéressante à la fonction de corrélation $C^{(1)}$.

3.3.5 Fonction de corrélation $C^{(2)}$

Nous rappelons, en figure 3.4, la structure des deux termes composants $C^{(2)}$

$$C_{a,a',b,b'}^{(2)} = C_I^{(2)} + C_{II}^{(2)}.$$

Les indices a, a' et b, b' marquent l'état de polarisation des ondes incidentes et émergentes alors que les indices $i, i', j, j', k, k', l, l'$ décrivent les états de polarisation internes. Le terme $C_I^{(2)}$ est donné par,

$$C_I^{(2)} \propto \sum_{ii'jj'kk'll'} \mathcal{L}_{aa',ii'} \mathcal{L}_{a'a,jj'} H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)} \mathcal{L}_{kk',bb} \mathcal{L}_{ll',b'b'}.$$

Nous n'explicitons pas complètement les variables d'intégration spatiale, qui sont en tout point identiques au cas scalaire, pour nous concentrer sur les degrés de liberté de polarisation. Les indices de polarisations aa', ii' ainsi que $a'a, jj'$ sont représentés sur la figure 3.4. Les deux propagateurs $\mathcal{L}_{aa',ii'}$ et $\mathcal{L}_{a'a,jj'}$ décrivent la propagation de l'interface d'entrée jusqu'au vertex de Hikami. Les deux propagateurs $\mathcal{L}_{kk',bb}$ et $\mathcal{L}_{ll',b'b'}$ décrivent quant à eux la propagation du vertex de Hikami jusqu'à l'interface de sortie. Remarquons qu'il est nécessaire de sommer sur les indices i, i', j, j', k, k', l et l' , qui sont les états internes de polarisation et sont donc libres.

L'expression du propagateur \mathcal{L} est donnée par la relation (3.4). En explicitant la partie tensorielle des différents propagateurs \mathcal{L} , la somme sur les indices de polarisation i, i', j, j', k, k', l et l' se réduit à une somme sur i, j, k et l avec $i' = i, j' = j, k' = k$ et $l' = l$. Aussi $C_I^{(2)}$ devient

$$C_I^{(2)} \propto (\delta_{aa'})^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int \mathcal{L} \mathcal{L} \left[\sum_{ijkl} H_{ii,jj,kk,ll}^{(4)} \right] \mathcal{L} \mathcal{L}. \quad (3.13)$$

Le facteur $(\delta_{aa'})^2$ est dû aux parties tensorielles des deux propagateurs $\mathcal{L}_{aa',ii}$ et $\mathcal{L}_{a'a,jj}$ alors que le facteur $(1/2)^2$ provient de la partie tensorielle de $\mathcal{L}_{kk,bb}$ et $\mathcal{L}_{ll,b'b'}$. Le facteur $(1/2)^2$ qui devrait apparaître dans $(\delta_{aa'})^2$ n'est pas présent car $C_I^{(2)}$ est normalisé par $\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle$.

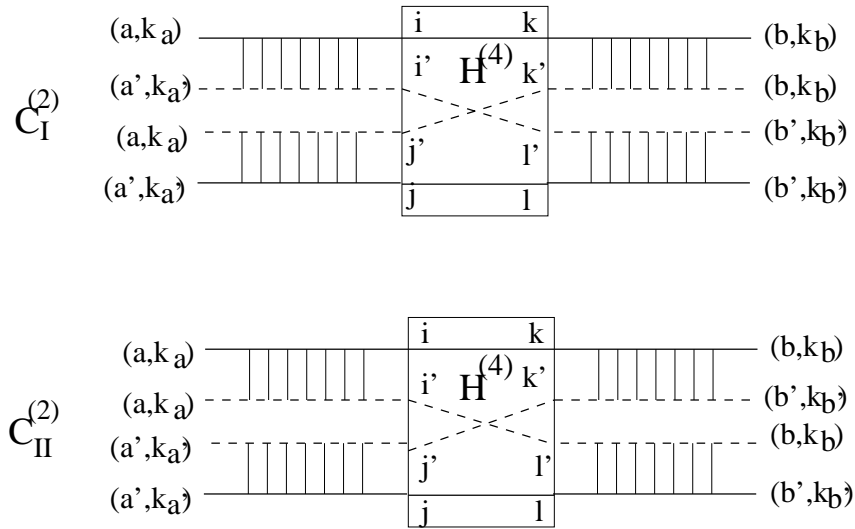


FIG. 3.4 - Représentation diagrammatique des deux termes donnant naissance à la corrélation $C^{(2)}$.

L'objet central du calcul de $C_1^{(2)}$ est maintenant le vertex $H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)}$. Au premier ordre en perturbation, il est formé de trois termes (figure 3.5)

$$H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)} = H_{ii',jj',kk',ll'}^1 + H_{ii',jj',kk',ll'}^2 + H_{ii',jj',kk',ll'}^3,$$

avec H^1 , H^2 et H^3 fonctions de \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 et \mathbf{p}_4 ,

$$\begin{aligned} H_{ii',jj',kk',ll'}^1 &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} G_{ik}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G_{j'k'}^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) G_{jl}(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) G_{i'l'}^*(\mathbf{q}), \\ H_{ii',jj',kk',ll'}^2 &= \frac{6\pi}{l} \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G_{i\alpha}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G^*(\mathbf{q}) G_{l\beta}(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) \times \\ &\quad G_{j\beta}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3) G_{i'l'}^*(\mathbf{q}') G_{k\alpha}(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_2), \\ H_{ii',jj',kk',ll'}^3 &= \frac{6\pi}{l} \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G_{\alpha l'}^*(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4) G_{jl}(\mathbf{q}') G_{j'\beta}^*(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_3) \times \\ &\quad G_{\beta k'}^*(\mathbf{q} - \mathbf{p}_2) G_{jk}(\mathbf{q}) G_{i'\alpha}^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_1). \end{aligned}$$

La somme sur les degrés de polarisation α et β pour H^2 et H^3 est due aux degrés internes de polarisation lors de la diffusion. Le calcul de H^1 , H^2 et H^3 s'effectue en développant la fonction de Green moyenne $G_{\alpha\beta}(\mathbf{q} + \mathbf{p})$ donnée en (3.3) au deuxième ordre en \mathbf{q} autour de \mathbf{p} , puis en intégrant sur les impulsions libres \mathbf{q} et \mathbf{q}' . Le calcul est long et technique et est développé dans l'annexe A. Néanmoins $H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)}$ possède la propriété suivante (annexe A),

$$\sum_{ijkl} H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)} = 2H_{\text{scalaire}}^{(4)}.$$

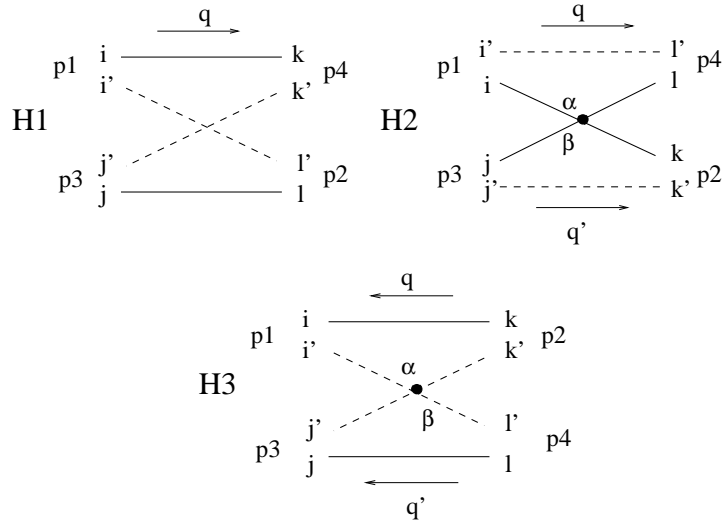


FIG. 3.5- Représentation diagrammatique des trois termes constituant le vertex de Hikami $H^{(4)}$ vectoriel à l'ordre le plus bas dans la série de perturbation.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 C_{\text{I}}^{(2)} &= \left(\frac{\delta_{aa'}}{2} \right)^2 2C_{\text{I scalaire}}^{(2)}, \\
 &= \frac{\delta_{aa'}^2}{2g_{\text{scal}}^0} F_2(\Delta q_a L), \\
 &= \frac{1}{g_{\text{pol}}^0} \delta_{aa'}^2 F_2(\Delta q_a L),
 \end{aligned}$$

avec

$$F_2(x) = \frac{\sinh 2x - 2x}{2x \sinh^2 x}, \quad F_2(0) = \frac{2}{3}, \quad F_2(x \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{x}, \quad (3.14)$$

qui est représentée sur la figure 2.5.

Le corrélation $C^{(2)}$ complète s'obtient en additionnant à $C_{\text{I}}^{(2)}$ le terme $C_{\text{II}}^{(2)}$ qui est décrit par le diagramme de la figure 3.4. Son calcul est identique à celui de $C_{\text{I}}^{(2)}$ en permutant les indices a, a', b et b' , ce qui nous conduit à la relation suivante

$$C_{\text{II}}^{(2)} = \frac{1}{g_{\text{pol}}^0} \delta_{bb'}^2 F_2(\Delta q_b L), \quad (3.15)$$

et donc à

$$C_{a,a',b,b'}^{(2)} = \frac{1}{g_{\text{pol}}^0} \left[\delta_{aa'}^2 F_2(\Delta q_a L) + \delta_{bb'}^2 F_2(\Delta q_b L) \right], \quad (3.16)$$

avec

$$g_{\text{pol}}^0 = \frac{2k_0^2 S l^*}{3\pi L}. \quad (3.17)$$

La forme générale de $C^{(2)}$ est intéressante. Si nous utilisons la conductance du système g_{pol}^0 , en prenant bien compte des degrés de polarisation, elle est identique à celle du cas scalaire.

La dépendance de $C^{(2)}$ vis à vis de la polarisation est prise en compte par la somme de deux fonctions delta (mais n'oublions pas que nous avons défini $\delta_{a,a'} \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_{a'}$ et $\delta_{b,b'} \equiv \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_{b'}$). Dans le cas de la corrélation $C^{(1)}$ il suffisait d'avoir $a \perp a'$ ou $b \perp b'$ pour la rendre rigoureusement nulle. Il est nécessaire d'avoir $a \perp a'$ et $b \perp b'$ pour que $C^{(2)}$ s'annule rigoureusement. C'est une propriété importante car il n'existe aucun autre moyen d'annuler rigoureusement $C^{(2)}$. A l'inverse, si nous posons $a \parallel a'$ et $b \parallel b'$, les deux fonctions delta prennent la valeur 1 et nous retrouvons un terme de corrélation $C^{(2)}$ de type scalaire.

3.3.6 Fonction de corrélation $C^{(3)}$

La question qui se pose à présent est : comment $C^{(3)}$ depend-il de la polarisation? Dans le cas vectoriel, la structure diagrammatique du terme $C^{(3)}$ est identique à celle du cas scalaire. Elle est constituée soit par la succession de deux vertex de Hikami $H^{(4)}$, soit par le vertex de Hikami $H^{(6)}$ comme indiqué sur la figure 3.6,

$$C_{a,a',b,b'}^{(3)} = C_{\text{I}}^{(3)} + C_{\text{II}}^{(3)}.$$

La contribution donnée par la succession des deux vertex de Hikami $H^{(4)}$ s'écrit schématiquement

$$C_{\text{I}}^{(3)} \approx \sum_{ii'jj'} \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} \int \mathcal{L}_{aa,ii'} \mathcal{L}_{a'a',jj'} H_{ii',jj',\alpha\alpha',\beta\beta'}^{(4)} \mathcal{L}_{\alpha\alpha',\delta\delta'} \mathcal{L}_{\beta\beta',\gamma\gamma'} H_{\delta\delta',\gamma\gamma',kk',ll'}^{(4)} \mathcal{L}_{kk',bb} \mathcal{L}_{ll',b'b'}. \quad (3.18)$$

Cette expression est particulièrement lourde mais simple dans son principe. Les deux premiers opérateurs \mathcal{L} propagent les champs entrants jusqu'au premier vertex de Hikami. Les deux opérateurs \mathcal{L} suivants font le lien entre les deux vertex alors que les deux derniers propagateurs décrivent la propagation des champs jusqu'à l'interface de sortie. Les deux sommes sont là pour rappeler que les indices de polarisation interne sont libres. Dans la même veine la contribution à $C_{\text{II}}^{(3)}$ due au vertex de Hikami $H^{(6)}$ est

$$C_{\text{II}}^{(3)} \propto \sum_{ii'jj'kk'll'} \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} \int \mathcal{L}_{aa,ii'} \mathcal{L}_{a'a',jj'} H_{ii',jj',kk',ll',\alpha\alpha',\beta\beta'}^{(6)} \mathcal{L}_{\alpha\alpha',\beta\beta'} \mathcal{L}_{kk',bb} \mathcal{L}_{ll',b'b'}. \quad (3.19)$$

et est graphiquement décrit sur la figure 3.6.

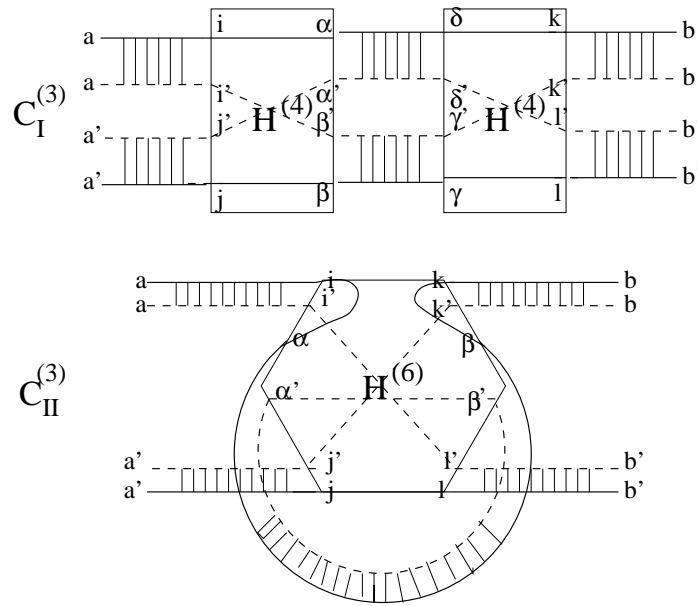


FIG. 3.6 - Représentation diagrammatique schématisée des deux termes donnant naissance à la corrélation $C^{(3)}$.

Nous voyons dès maintenant que les termes $C_I^{(3)}$ et $C_{II}^{(3)}$ donnés par (3.18) et (3.19) sont indépendants des indices de polarisation a , a' , b et b' . En effet ces indices apparaissent dans les quatre propagateurs \mathcal{L} par groupe de deux indices identiques, $\mathcal{L}_{aa,ii'}$ par exemple. Nous en concluons que la corrélation $C^{(3)}$ est indépendante des indices de polarisation a , a' , b et b'

$$C_{a,a',b,b'}^{(3)} = \text{un nombre.}$$

Il reste à déterminer l'expression exacte de $C^{(3)}$.

Calcul de $C_I^{(3)}$

L'expression de $C_I^{(3)}$ donnée en (3.18) se simplifie grandement grâce aux fonctions delta des opérateurs L . Celles-ci imposent $i' = i$, $j' = j$, $k' = k$... et il ne reste plus qu'une somme sur les indices non primés,

$$C_I^{(3)} \propto \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int \mathcal{L}\mathcal{L} \left[\sum_{ij\alpha\beta} H_{ii,jj,\alpha\alpha,\beta\beta}^{(4)} \right] \mathcal{L}\mathcal{L} \left[\sum_{\delta\gamma kl} H_{\delta\delta,\gamma\gamma,kl,ll}^{(4)} \right] \mathcal{L}\mathcal{L}.$$

De plus le vertex $H^{(4)}$ possède la propriété suivante (Annexe A),

$$\sum_{ijkl} H_{ii,jj,kl,ll}^{(4)} = 2H_{\text{scalaire}}^{(4)}$$

aussi

$$\begin{aligned} C_I^{(3)} &= \propto 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int \mathcal{L}\mathcal{L}H_{\text{scalaire}}^{(4)}\mathcal{L}\mathcal{L}H_{\text{scalaire}}^{(4)}\mathcal{L}\mathcal{L}, \\ &= \frac{1}{4}C_{I\text{ scalaire}}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Calcul de $C_{II}^{(3)}$

Pour les mêmes raisons que pour $C_I^{(3)}$ la somme sur les indices se simplifie pour donner l'expression suivante de $C_{II}^{(3)}$

$$C_{II}^{(3)} \propto \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \int \mathcal{L}\mathcal{L} \left[\sum_{ijkl\alpha\beta} H_{ii,jj,kk,ll,\alpha\alpha,\beta\beta}^{(6)} \right] \mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}.$$

Il est possible de montrer, par des calculs identiques à ceux effectués dans l'annexe A pour le vertex $H^{(4)}$, que le vertex $H^{(6)}$ possède la même structure que $H^{(4)}$. C'est-à-dire que chacun des seize diagrammes le constituant est le produit de deux termes, l'un décrivant la polarisation alors que l'autre est identique au diagramme scalaire équivalent. Chaque terme décrivant la polarisation étant construit sur le même mode que pour $H^{(4)}$. Aussi lorsque l'on pose $i' = i, j' = j \dots$ et que l'on somme sur les indices il vient

$$\sum_{ijkl\alpha\beta} H_{ii,jj,kk,ll,\alpha\alpha,\beta\beta}^{(6)} = 2H_{\text{scalaire}}^{(6)}.$$

Ceci nous amène à la relation suivante

$$C_{II}^{(3)} = \frac{1}{4}C_{II\text{ scalaire}}^{(3)}. \quad (3.21)$$

En combinant les expressions de $C_I^{(3)}$ et $C_{II}^{(3)}$ en (3.20) et (3.21) nous arrivons à l'expression suivante pour la fonction de corrélation $C^{(3)}$ vectorielle

$$C_{a,a',b,b'}^{(3)} = \left(\frac{1}{g_{pol}^0}\right)^2 F_3,$$

avec

$$F_3 = \begin{cases} \frac{2}{15} & \text{quasi 1D,} \\ \frac{3}{\pi^3} \zeta(3) \frac{W}{L} & \text{quasi 2D,} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{W^2}{L^2} & \text{3D.} \end{cases}$$

Le terme de corrélation $C^{(3)}$ est un terme constant indépendant de l'orientation des ondes incidentes et émergentes aussi bien que de l'état de polarisation de ces ondes. La corrélation $C^{(3)}$ vectorielle a la même forme fonctionnelle que dans le cas scalaire.

3.4 Bilan des sections précédentes

Dans la section 3.2 nous avons introduit le coefficient de transmission de l'intensité d'une onde incidente dans la direction \mathbf{k}_a avec l'état de polarisation linéaire a vers une onde émergente dans la direction \mathbf{k}_b avec l'état de polarisation linéaire b , ainsi que la fonction de corrélation de l'intensité transmise définie par la relation,

$$C_{a,a',b,b'} = \frac{\langle \delta T_{ab} \delta T_{a'b'} \rangle}{\langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle} \equiv C_{a,a',b,b'}^{(1)} + C_{a,a',b,b'}^{(2)} + C_{a,a',b,b'}^{(3)},$$

où $\delta T_{ab} = T_{ab} - \langle T_{ab} \rangle$ et $\delta T_{a'b'} = T_{a'b'} - \langle T_{a'b'} \rangle$. Nous avons calculé au cours des sections 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.6 les termes $C_{a,a',b,b'}^{(1)}$, $C_{a,a',b,b'}^{(2)}$ et $C_{a,a',b,b'}^{(3)}$. Ceci nous a conduit à la relation suivante pour la fonction de corrélation de l'intensité angulaire transmise $C_{a,a',b,b'}$

$$\begin{aligned} C_{a,a',b,b'} &= \delta_{aa'}^2 \delta_{bb'}^2 \delta_{\Delta \mathbf{q}_a, \Delta \mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L) \\ &+ \frac{1}{g_{pol}^0} \left[\delta_{aa'}^2 F_2(\Delta q_a L) + \delta_{bb'}^2 F_2(\Delta q_b L) \right] \\ &+ \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3 \end{aligned}$$

où $\Delta \mathbf{q}_a$ et $\Delta \mathbf{q}_b$ sont les composantes parallèles aux interfaces des vecteurs $\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_{a'}$ et $\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_{b'}$, et où les fonctions F_1 , F_2 et F_3 sont données par (2.19), (2.20) et (2.21), et le coefficient g_{pol}^0 par

$$g_{pol}^0 = \frac{2k_0^2 S l^*}{3\pi L} = 2g_{scal}^0.$$

La représentation graphique des fonctions F_1 , F_2 et F_3 est donnée sur la figure 2.5. Le calcul des termes suivants dans le développement perturbatif n'engendre pas de fonctions de corrélation $C^{(4)}$, $C^{(5)}$..., mais des corrections en puissances de $1/g_{pol}^0$ aux fonctions $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$.

3.4.1 Interprétation physique

Les interprétations physiques données aux termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ dans le cas scalaire sont toujours valables pour une onde vectorielle. Le terme de corrélation $C^{(1)}$ décrit les fortes fluctuations de l'intensité transmise à travers un milieu aléatoire. C'est lui qui explique la nature tavelée de l'image obtenue sur l'écran de détection. Le terme de corrélation $C^{(2)}$ décrit quant à lui les fluctuations du coefficient de transmission totale. Finalement c'est $C^{(3)}$ qui explique les fluctuations universelles de conductance.

Néanmoins les différentes règles de sélections des polarisations des corrélations $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ donnent une liberté que nous n'avions pas dans le cas scalaire. En jouant sur les états de polarisation des ondes incidentes et émergentes, on peut mesurer séparément les différents termes de la fonction de corrélation $C_{a,a',b,b'}$.

Si $a \parallel a'$ et $b \parallel b'$

Toutes les fonctions delta prennent la valeur 1 aussi

$$C_{a\parallel a',b\parallel b'} = \delta_{\Delta\mathbf{q}_a,\Delta\mathbf{q}_b} F_1(\Delta q_a L) + \frac{1}{g_{pol}^0} [F_2(\Delta q_a L) + F_2(\Delta q_b L)] + \left(\frac{1}{g_{pol}^0}\right)^2 F_3. \quad (3.22)$$

La fonction de corrélation (3.22) n'est pas parfaitement identique au cas scalaire car c'est le facteur g_{pol}^0 qui apparaît et non pas g_{scal}^0 . En revanche la forme de la fonction de corrélation correspond à la fonction de corrélation scalaire (2.18).

Si $a \parallel a'$ et $b \perp b'$ (ou $a \perp a'$ et $b \parallel b'$)

Dans cette situation la fonction $\delta_{bb'} = 0$, par conséquent le terme $C^{(1)}$ est nul de même que la partie faisant intervenir les ondes émergentes dans $C^{(2)}$. La fonction de corrélation de l'intensité transmise prend donc la forme

$$C_{a\parallel a',b\perp b'} = \frac{1}{g_{pol}^0} F_2(\Delta q_a L) + \left(\frac{1}{g_{pol}^0}\right)^2 F_3.$$

Dans cette situation il est possible, sans avoir recours aux sphères d'intégration décrites au chapitre 2, de mesurer directement la dépendance angulaire de la fonction F_2 et par là même la fonction de corrélation $C^{(2)}$.

Si $a \perp a'$ et $b \perp b'$

Dans cette situation toutes les fonctions delta sont nulles et la fonction de corrélation de l'intensité transmise se résume à

$$C_{a\perp a',b\perp b'} = \left(\frac{1}{g_{pol}^0}\right)^2 F_3.$$

Ainsi la mesure de la corrélation de l'intensité pour des polarisations incidentes et émergentes croisées équivaut à mesurer directement $C^{(3)}$. Cette situation est une occasion unique de mesurer "facilement" $C^{(3)}$ pour la lumière.

3.5 Influence de l'absorption

La présence d'absorption dans le milieu peut être facilement pris en compte. En effet l'influence de l'absorption est indépendante de l'état de polarisation des ondes électromagnétiques et a un effet purement scalaire. Par conséquent son action se porte uniquement

sur la partie scalaire de la fonction de Green moyenne du milieu ainsi que sur la partie scalaire du propagateur de l'intensité diffuse. Or ces deux quantités sont les mêmes que dans le cas d'une onde scalaire. L'influence de la longueur d'absorption L_a sur les coefficients de transmission ainsi que sur la fonction de corrélation $C_{a,a',b,b'}$ est donc identique au cas scalaire (voir la section 2.5). La fonction de corrélation du coefficient de transmission de l'intensité est modifiée en,

$$\begin{aligned} C_{a,a',b,b'} &= \delta_{aa'}^2 \delta_{bb'}^2 \delta_{\Delta q_a, \Delta q_b} F_1(\Delta q_a L, L/L_a) \\ &+ \frac{1}{g_{pol}^0} \left[\delta_{aa'}^2 F_2(\Delta q_a L, L/L_a) + \delta_{bb'}^2 F_2(\Delta q_b L, L/L_a) \right] \\ &+ \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où les fonctions F_1 , F_2 et F_3 sont données par les relations (2.25), (2.26) et (2.28) du chapitre 2.

3.6 Comparaison des résultats théoriques aux résultats expérimentaux

Dans cette partie nous allons interpréter le résultat d'expériences de l'équipe du professeur Genack du Queens College de New York avec les résultats théoriques des sections précédentes. Les résultats expérimentaux présentés ici sont encore préliminaires et n'ont pas été publiés. Les expériences sont dues à Andrey Chabanov qui a effectué son travail de thèse sur la mésoscopie et la localisation d'Anderson des micro-ondes [17].

La description du dispositif expérimental est la suivante (figure 3.7) : un tube de cuivre de 7.3 cm de diamètre et de longueur $L = 90$ cm est rempli de billes d'alumine et de polystyrène. Les billes d'alumine Al_2O_3 ont 0.95 cm de diamètre, une constante diélectrique de 9.86 et forment les diffuseurs au sein du tube. Les billes de polystyrène, de 1.9 cm de diamètre, sont présentes pour supporter les billes d'alumine et permettent de faire varier la concentration de diffuseurs (qui est ici de 0.068 en volume). Les billes de polystyrène sont transparentes au rayonnement électromagnétique utilisé. L'influence de l'absorption est non négligeable car $L/L_a \approx 4.3$ pour ce dispositif expérimental particulier. Les différentes réalisations du désordre sont obtenues par rotation du tube. Chaque rotation a pour effet de mélanger les différentes billes et par conséquent de changer aléatoirement la répartition des diffuseurs. La rotation du tube est automatisée par un système de moteurs pas à pas. Les moyennes statistiques sont réalisées sur 8600 différentes réalisations

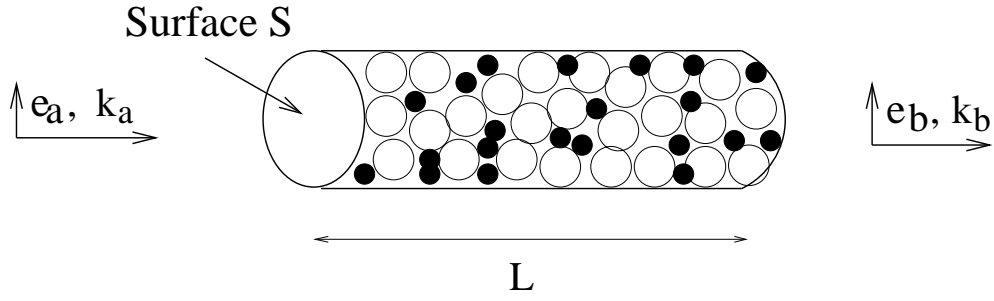


FIG. 3.7 - Un tube de cuivre est rempli de billes d'alumine Al_2O_3 (sphères noires) et de billes de polystyrène transparentes aux micro-ondes. Les réalisations du désordre sont obtenues par rotation du tube.

du désordre. Les fréquences utilisées sont de l'ordre de 17 GHz, ce qui correspond à un rayonnement électromagnétique micro-ondes.

La détection des micro-ondes peut se faire au niveau du champ électrique (amplitude et phase), ce qu'il est extrêmement difficile de faire aux fréquences optiques. Ceci apporte une grande souplesse aux mesures car le terme de corrélation $C^{(1)}$ est le module carré de la corrélation du champ électrique transmis. Il est donc possible de mesurer séparément la corrélation $C^{(1)}$ et de la déduire des deux autres termes $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$.

Le milieu est illuminé par une onde électromagnétique linéairement polarisée et la détection se fait grâce à une antenne sensible à la polarisation linéaire du champ électrique transmis. L'orientation de la polarisation du générateur de micro-ondes peut prendre deux positions, 0 et 90 degrés, alors que le détecteur peut être tourné entre 0 et 90 degrés par pas de 15 degrés. Nous avons donc 14 configurations différentes des polarisations pour chaque réalisation du désordre.

Nous nous intéressons à la dépendance de la polarisation vis à vis de la corrélation de l'intensité transmise, aussi nous nous plaçons dans la situation où $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{a'}$ et $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_{b'}$. Appelons θ_{in} et θ_{out} les angles formés par les directions des polarisations linéaires incidentes et émergentes (figure 3.8). Comme nous avons défini $\delta_{a,a'} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_{a'}$ et $\delta_{b,b'} = \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_{b'}$, l'expression de la corrélation de l'intensité transmise (3.23) devient

$$\begin{aligned}
 C(\theta_{in}, \theta_{out}) &= \cos^2 \theta_{in} \cos^2 \theta_{out} \\
 &+ \frac{1}{g_{pol}^0} F_2(0, L/L_a) [\cos^2 \theta_{in} + \cos^2 \theta_{out}] \\
 &+ \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

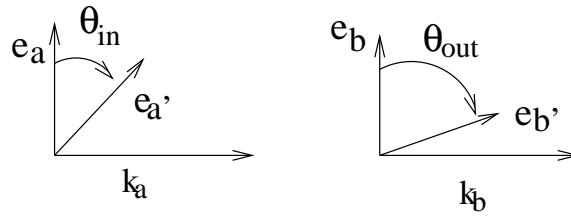


FIG. 3.8 - Angles entre les polarisations incidente et émergente.

où les fonctions F_2 et F_3 sont données par les relations (2.26) et (2.28) du chapitre 2. La longueur d'absorption est connue ($L/L_a \approx 4.3$), ce qui nous donne,

$$F_2(0, L/L_a \approx 4.3) = 0.56,$$

$$F_3(L/L_a \approx 4.3) = \begin{cases} 0.15 & \text{Pnini,} \\ 0.11 & \text{Brouwer.} \end{cases}$$

Si $\theta_{in} = 0$

Dans cette situation le terme $C^{(1)}$ et la corrélation de l'intensité transmise prennent la forme suivante en fonction de l'angle θ_{out}

$$C^{(1)}(\theta_{in} = 0, \theta_{out}) = \cos^2 \theta_{out}, \quad (3.25)$$

$$C(\theta_{in} = 0, \theta_{out}) = \cos^2 \theta_{out} + \frac{1}{g_{pol}^0} F_2(0, L/L_a) [1 + \cos^2 \theta_{out}]$$

$$+ \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a). \quad (3.26)$$

Si $\theta_{in} = \pi/2$

Dans cette situation la corrélation de l'intensité transmise s'écrit

$$C(\theta_{in} = \frac{\pi}{2}, \theta_{out}) = \frac{1}{g_{pol}^0} F_2(0, L/L_a) \cos^2 \theta_{out} + \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a). \quad (3.27)$$

La figure 3.9 présente la comparaison entre la mesure expérimentale de la corrélation C et la prédiction théorique pour différents angle θ_{out} lorsque $\theta_{in} = \pi/2$. Remarquons que le point $\theta_{out} = \pi/2$ est égal, d'après la théorie, à $C^{(3)}$. La courbe en trait plein correspond à la fonction (3.27) lorsque $g_{pol}^0 = 2.27$ et $F_3(L/L_a) = 0.14$.

La figure 3.10 présente la variation des fonctions de corrélation $C^{(1)}$ et C avec l'angle θ_{out} lorsque $\theta_{in} = 0$. Remarquons qu'il n'y a pas de paramètre ajustable dans l'expression théorique de $C^{(1)}$.

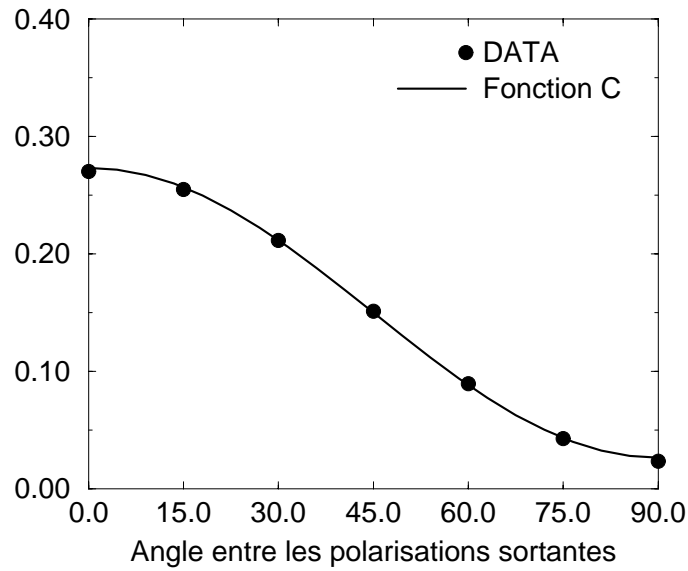


FIG. 3.9 - Comparaison entre la mesure de la fonction de corrélation expérimentale C (points noirs) et la prédiction théorique (courbe en traits pleins) en fonction de l'angle θ_{out} lorsque $\theta_{in} = \pi/2$, $g_{pol}^0 = 2.27$ et $F_3(L/L_a) = 0.14$.

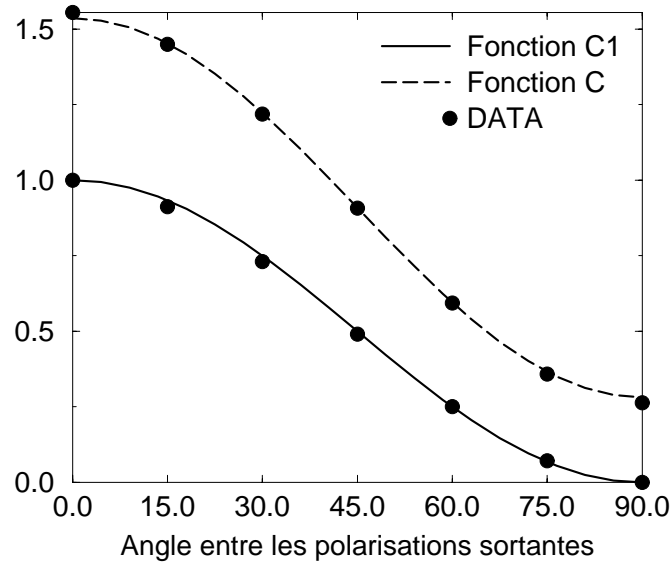


FIG. 3.10 - Comparaison entre les mesures des fonctions de corrélations expérimentales $C^{(1)}$ et C (points noirs) et les prédictions théoriques en fonction de l'angle θ_{out} lorsque $\theta_{in} = 0$, $g_{pol}^0 = 2.27$ et $F_3(L/L_a) = 0.14$.

La valeur obtenue pour la fonction $F_3(L/L_a \approx 4.3) \approx 0.14$ est légèrement différente des prédictions théoriques de Pnini et Brouwer. La comparaison entre l'expérience et la théorie est très encourageante même si les données présentées ici ne sont pas suffisamment finalisées pour leur attribuer des barres d'erreurs et déterminer avec précision $C^{(3)}$. Cette expérience représente la première mise en évidence expérimentale directe de la fonction de corrélation $C^{(3)}$ pour la lumière polarisée.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique à travers un milieu aléatoire prenant en compte rigoureusement les effets de polarisation.

Après avoir calculé les coefficients de transmission d'une onde polarisée, nous nous sommes focalisés sur les corrélations de l'intensité transmise, et plus particulièrement sur la dépendance de ces fonctions de corrélation avec les états de polarisation des ondes. Nous avons montré que les trois termes de corrélation $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ ont des règles de sélection différentes. La corrélation $C^{(1)}$ est strictement nulle lorsque les polarisations incidentes ou émergentes sont croisées. Le terme de corrélation $C^{(2)}$ est nul lorsque les polarisations incidentes *et* émergentes sont croisées alors que la corrélation $C^{(3)}$ est indépendante des états de polarisation des ondes. La dépendance des trois fonctions de corrélation avec les directions des faisceaux et avec l'absorption est identique à celle d'une onde acoustique obtenue au chapitre 2. En utilisant les différentes règles de sélection sur les polarisations, il est possible de mesurer directement le terme de corrélation $C^{(3)}$.

La comparaison avec les résultats expérimentaux obtenues par Genack et Chabanov du Queens College de New York, pour un milieu quasi 1D, est très encourageante. Les dépendances théoriques de la fonction de corrélation de l'intensité transmise avec la polarisation sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

Annexe A

Calcul du vertex de Hikami $H^{(4)}$

Dans cette annexe nous allons détailler le calcul du vertex de Hikami $H^{(4)}$ dans le cas vectoriel. Au premier ordre en perturbation le vertex de Hikami $H^{(4)}$ est formé de trois termes, voir figure 3.5

$$H_{ii',jj',kk',ll'}^{(4)} = H_{ii',jj',kk',ll'}^1 + H_{ii',jj',kk',ll'}^2 + H_{ii',jj',kk',ll'}^3$$

avec H^1 , H^2 et H^3 ,

$$\begin{aligned} H_{ii',jj',kk',ll'}^1 &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} G_{ik}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G_{j'k'}^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) G_{jl}(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) G_{i'l'}^*(\mathbf{q}), \\ H_{ii',jj',kk',ll'}^2 &= \frac{6\pi}{l} \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G_{i\alpha}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1) G^*(\mathbf{q}) G_{l\beta}(\mathbf{q} + \mathbf{p}_4) \times \\ &\quad G_{j\beta}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3) G_{i'l'}^*(\mathbf{q}') G_{k\alpha}(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_2), \\ H_{ii',jj',kk',ll'}^3 &= \frac{6\pi}{l} \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} G_{\alpha l'}^*(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4) G_{jl}(\mathbf{q}') G_{j'\beta}^*(\mathbf{q}' + \mathbf{p}_3) \times \\ &\quad G_{\beta k'}^*(\mathbf{q} - \mathbf{p}_2) G_{jk}(\mathbf{q}) G_{i'\alpha}^*(\mathbf{q} + \mathbf{p}_1). \end{aligned}$$

La somme sur les degrés de polarisation α et β des termes H^2 et H^3 est due aux degrés de polarisation interne libres du diffuseur présent pour ces deux diagrammes.

Le calcul de H^1 , H^2 et H^3 s'effectue en développant la fonction de Green moyenne $G_{\alpha\beta}(\mathbf{q} + \mathbf{p})$ donnée par la relation (3.3) au deuxième ordre en \mathbf{q} autour de \mathbf{p} , ce qui donne

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) &= G(p) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta + p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha + q_\alpha q_\beta}{k_0^2} \right] \\ &+ G(p)^2 \left[\delta_{\alpha\beta} (-q^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) + q^2 \frac{p_\alpha p_\beta}{k_0^2} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \frac{p_\alpha p_\beta + p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha}{k_0^2} \right] \\ &+ G(p)^3 \left[4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \delta_{\alpha\beta} - 4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{p_\alpha p_\beta}{k_0^2} \right], \end{aligned}$$

avec

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - \nu^2}, \quad \nu^2 = (k_0^2 + ik_0/l),$$

puis en intégrant sur les impulsions libres \mathbf{q} et \mathbf{q}' . Lors du produit des fonctions de Green, il est nécessaire de faire particulièrement attention pour ne garder que les termes dominants en puissance de $1/k_0l$. Chaque terme H^1 , H^2 et H^3 est alors donné par le produit d'un tenseur et d'une fonction scalaire identique au diagramme scalaire équivalent. En utilisant les relations [13, 16, 18]

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G(p)^m G(p)^{*n} &= I_{m,n}, \\ \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 G(p)^m G(p)^{*n} &= \frac{1}{3} k^2 p^2 I_{m,n}, \end{aligned}$$

avec

$$I_{m,n} = \frac{i(2i)^{-(m+n+1)} (-1)^{n-1} (m+n-2)!}{2\pi (m-1)!(n-1)!} l^{2(m+n)-3} \left(\frac{1}{k_0 l} \right)^{m+n-2},$$

il vient pour H^1

$$H_{i'i',jj',kk',ll'}^1 = \langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle > \left[\frac{l^3}{8\pi k_0^2} - \frac{l^5}{24\pi k_0^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right],$$

avec le tenseur de rang huit

$$\langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle = \int \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{4\pi} (\delta_{ik} - n_i n_k) (\delta_{i'l'} - n_{i'} n_{l'}) (\delta_{jl} - n_j n_l) (\delta_{j'k'} - n_{j'} n_{k'}),$$

où n_i est la composante i du vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}$. Le tenseur $\langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle$ est directement dû au produit des parties tensorielles des quatre fonction de Green. A ce stade il est pratique d'introduire le tenseur de rang 2 suivant

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j,$$

qui vérifie la relation de projection

$$\sum_{j=1}^3 \Delta_{ij} \Delta_{jk} = \Delta_{ik}.$$

Le tenseur $\langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle$ s'exprime en fonction de Δ par

$$\langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle = \int \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{4\pi} \Delta_{ik} \Delta_{i'l'} \Delta_{jl} \Delta_{j'k'}.$$

En développant le produit des quatre fonctions Δ , il est, en principe, possible d'exprimer $\langle T_{ik'i'l'jl'k'}^8 \rangle$ comme une somme de tenseurs irréductibles. Néanmoins nous allons voir que cette opération n'est pas nécessaire pour le calcul explicite de $C^{(2)}$.

Les termes H^2 et H^3 sont donnés par

$$H_{i'i',jj',kk',ll'}^2 = \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle T_{i\alpha\beta li'l'}^6 \rangle \langle T_{j\beta\alpha k j'k'}^{6'} \rangle \times \left[-\frac{l^3}{161k_0^2} + \frac{l^5}{48\pi k_0^2} (-\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right],$$

et

$$H_{i'i',jj',kk',ll'}^3 = \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle T_{iki'\alpha\beta k'}^6 \rangle \langle T_{jlj'\beta\alpha l'}^{6'} \rangle \times \left[-\frac{l^3}{161k_0^2} + \frac{l^5}{48\pi k_0^2} (-\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right],$$

avec

$$\begin{aligned} \langle T_{jki'\alpha\beta k'}^6 \rangle &= \int \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{4\pi} \Delta_{jk} \Delta_{i'\alpha} \Delta_{\beta k'}, \quad \text{où } \Delta_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k, \\ \langle T_{jlj'\beta\alpha l'}^{6'} \rangle &= \int \frac{d\hat{\mathbf{n}}'}{4\pi} \Delta'_{jl} \Delta'_{j'\beta} \Delta'_{\alpha l'}, \quad \text{où } \Delta'_{ij} = \delta_{ij} - n'_i n'_j. \end{aligned}$$

En prenant la somme des trois termes H^1 , H^2 et H^3 , nous arrivons à la relation suivante pour le vertex de Hikami $H^{(4)}$

$$\begin{aligned} H_{i'i',jj',kk',ll'}^{(4)} &= \langle T_{iki'l'jlj'k'}^8 \rangle \left[\frac{l^3}{8\pi k_0^2} - \frac{l^5}{24\pi k_0^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right] \\ &+ \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle T_{i\alpha\beta li'l'}^6 \rangle \langle T_{j\beta\alpha k j'k'}^{6'} \rangle \times \\ &\quad \left[-\frac{l^3}{16\pi k_0^2} + \frac{l^5}{48\pi k_0^2} (-\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right] \\ &+ \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle T_{iki'\alpha\beta k'}^6 \rangle \langle T_{jlj'\beta\alpha l'}^{6'} \rangle \times \\ &\quad \left[-\frac{l^3}{16\pi k_0^2} + \frac{l^5}{48\pi k_0^2} (-\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2) \right]. \end{aligned}$$

Cette expression est extrêmement compliquée mais se simplifie grandement lorsque l'on prend en compte les quatre propagateurs polarisés \mathcal{L} liés au vertex de Hikami dans l'expression (3.13) de $C^{(2)}$. Ceux-ci imposent $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$ et $l = l'$. En sommant sur les indices i, j, k et l et en utilisant la relation $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ il vient

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} H_{i'i',jj',kk',ll'}^{(4)} &= 2 \frac{-l^5}{48\pi k_0^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 + 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4), \\ &= 2 \frac{-l^5}{48\pi k_0^2} (2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - \mathbf{p}_4^2), \\ &= 2H_{scal}^{(4)}. \end{aligned}$$

En effet la partie tensorielle de H^1 donne

$$\begin{aligned}
\sum_{ijkl} \langle T_{ikiljlk}^8 \rangle &= \sum_{ijkl} \langle \Delta_{ik} \Delta_{il} \Delta_{jl} \Delta_{jk} \rangle \\
&= \sum_{k=1}^3 \langle \delta_{kk} - n_k n_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^3 \frac{2}{3} \delta_{kk} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

alors que la partie tensorielle de H^2 (et de H^3 de la même façon) donne

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta ijkl} \langle T_{i\alpha\beta lil}^6 \rangle \langle T'_{j\beta\alpha kjk}{}' \rangle &= \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta ijkl} \langle \Delta_{i\alpha} \Delta_{\beta l} \Delta_{il} \rangle \langle \Delta'_{j\beta} \Delta'_{\alpha k} \Delta'_{jk} \rangle \\
&= \frac{3}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle \Delta_{\alpha\beta} \rangle \langle \Delta'_{\alpha\beta} \rangle \\
&= \frac{2}{3} \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

La conclusion de cette annexe est donc la suivante

$$\sum_{ijkl} H_{ii,jj,kk,ll}^{(4)} = 2H_{scal}^{(4)}.$$

Bibliographie

- [1] F. MacKintosh et S. John. Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media. *Phys. Rev. B.*, 40:2383, 1989.
- [2] E. Akkermans P. Wolf R. Maynard et G. Maret. Theoretical study of coherent backscattering of light by disordered media. *J. Phys.*, 49:77, 1988.
- [3] B. van Tiggelen R. Maynard et Th. Nieuwenhuizen. Theory for multiple light scattering from rayleigh scatterers in magnetic fields. *Phys. Rev. E.*, 53:2881, 1996.
- [4] D. Lacoste et B. van Tiggelen. Coherent backscattering of light in a magnetic field. *Phys. Rev. E.*, 61:4556, 2000.
- [5] G. Rikken et B. van Tiggelen. Observation of magneto-transverse light diffusion. *Nature*, 381:54, 1996.
- [6] U. Frisch. *Probabilistic methods in applied mathematics*, page 75. Academic, New-York, 1968.
- [7] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, second edition, 1975.
- [8] P. Sebbah, editor. *Coherent Multiple Scattering in Disordered Media*, page 29. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [9] A. Lagendijk et B. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.*, 270:143, 1996.
- [10] F. MacKintosh et S. John. Coherent backscattering of light in the presence of time-reversal-noninvariant and parity-nonconserving media. *Phys. Rev. B.*, 37:1884, 1988.

- [11] M. Stephen et G. Cwilich. Rayleigh scattering and weak localization: Effect of polarization. *Phys. Rev. B.*, 34:7564, 1986.
- [12] K. Peters. Coherent-backscatter effect: A vector formulation accounting for polarization and absorption effect and small or large scatterers. *Phys. Rev. B.*, 46:801, 1992.
- [13] R. Berkovits et S. Feng. Correlations in coherent multiple scattering. *Phys. Rep.*, 238:135, 1994.
- [14] B. Shapiro. Large intensity fluctuations for wave propagation in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2168, 1986.
- [15] M. van Rossum et Th. Nieuwenhuizen. Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy and diffusion. *Rev. Mod. Phys.*, 71(1):313, 1999.
- [16] M. van Rossum. *Mesoscopic phenomena in multiple light scattering*. PhD thesis, Université d'Amsterdam, 1995.
- [17] A. Chabanov M. Stoytchev et A. Genack. Statistical approach to photon localization. *Nature*, 404:850, 2000.
- [18] J. de Boer. *Optical fluctuations in the transmission and reflection of mesoscopic media*. PhD thesis, Université d'Amsterdam, 1995.

Chapitre 2

Bilan et perspectives

Dans cette première partie nous avons étudié le transport d'une onde à travers un milieu hétérogène linéaire dans le régime mésoscopique de faible désordre. Ce régime est caractérisé par l'inégalité $\lambda \ll l^* \ll L \ll L_{\phi,a}$ où λ est la longueur d'onde, l^* le libre parcours moyen de transport, L l'épaisseur du milieu, L_ϕ la longueur de cohérence et L_a la longueur d'absorption. Le régime mésoscopique de faible désordre correspond à une situation où l'onde est diffusée multiplement dans le milieu (ce que décrit l'inégalité $l^* \ll L$) tout en gardant sa cohérence de phase au cours de la propagation (c'est le sens de l'inégalité $L \ll L_{\phi,a}$).

Au chapitre 2 nous avons présenté la propagation d'une onde acoustique à travers un milieu hétérogène. Par le biais de techniques diagrammatiques, nous avons calculé les coefficients de transmission moyen de l'intensité et les corrélations des coefficients de transmission de l'intensité. Ceci nous a amené à introduire trois fonctions de corrélation, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ qui décrivent la corrélation des coefficients de l'intensité transmise. Nous avons montré que le terme $C^{(1)}$ est le terme dominant de la fonction de corrélation de l'intensité transmise. Le terme $C^{(2)}$ est le terme dominant de la corrélation de l'intensité transmise totale alors que le terme $C^{(3)}$ décrit les fluctuations universelles de conductance. Nous avons présenté l'influence de la longueur d'absorption sur les diverses quantités de transport.

Au chapitre 3 nous avons discuté de la propagation d'une onde électromagnétique polarisée linéairement à travers un milieu hétérogène. En suivant le plan du chapitre 2, nous avons d'abord étudié les coefficients de transmission moyen de l'intensité puis la fonction de corrélation de l'intensité transmise. La difficulté technique liée aux ondes

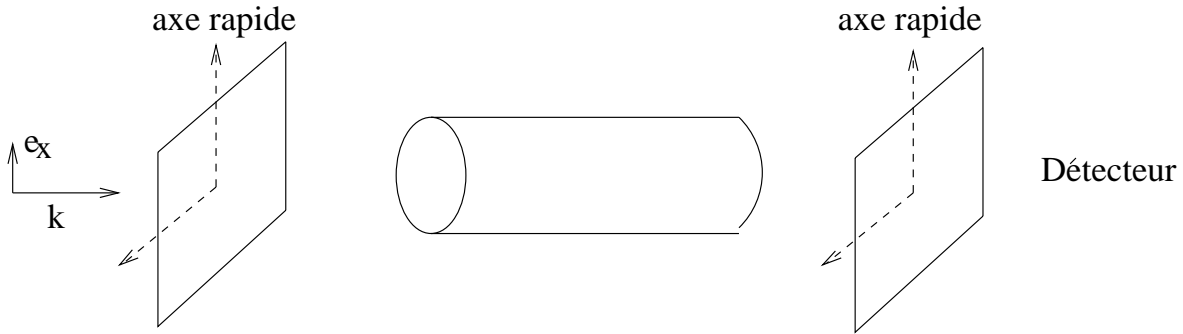


FIG. 2.1 - *Dispositif expérimental schématique d'une expérience avec des faisceaux polarisés circulairement.*

électromagnétiques est de prendre rigoureusement en compte les degrés de polarisation. Ceci nous a amené à calculer la fonction de Green moyenne, le propagateur de l'intensité et le vertex de Hikami $H^{(4)}$ dans le cas d'une onde vectorielle. Nous avons montré que les fonctions de corrélations $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$, que nous avons introduit au chapitre 2, peuvent se généraliser au cas d'une onde électromagnétique polarisée. La polarisation introduit une contribution supplémentaire par le biais de nouvelles règles de sélection aux termes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$. Ceci ouvre la possibilité de mesures directes de la fonction de corrélation $C^{(3)}$ en effet, lorsque les polarisations des faisceaux incidents et émergents sont croisées nous avons montré que les termes $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ s'annulaient et que par conséquent, la fonction de corrélation de l'intensité transmise était donnée par la fonction de corrélation $C^{(3)}$. Nous avons présenté une comparaison très encourageante entre ces résultats théoriques et les résultats préliminaires d'une expérience réalisée sur un milieu quasi 1D avec des micro-ondes polarisées linéairement. Cette expérience a été effectuée par A. Chabanov et A. Genack du Queens College de New York et est la première mise en évidence directe de la corrélation $C^{(3)}$ pour la lumière polarisée.

Perspectives

La mesure, que nous avons décrite précédemment de la fonction de corrélation de l'intensité transmise pour des micro-ondes polarisées pose un problème. En effet, elle nécessite de faire tourner la source ainsi que le détecteur si bien que les câbles d'alimentation ont tendance à gêner la rotation. Ceci induit une corrélation fortuite difficilement quantifiable dans la mesure de la fonction de corrélation de l'intensité transmise. Or, comme nous

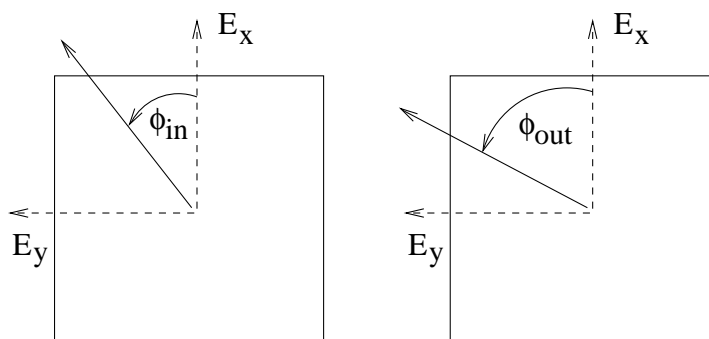


FIG. 2.2 - Définition des angles ϕ_{in} et ϕ_{out} .

l'avons vu au chapitre 3, le terme de corrélation $C^{(3)}$ est très faible et il est primordial d'obtenir la fonction de corrélation de l'intensité transmise avec un très grande précision.

Pour éviter ce problème une méthode proposée par A. Chabanov est de réaliser les mesures non pas avec de faisceaux polarisés linéairement mais circulairement. Ceci peut se mettre en oeuvre en plaçant à l'entrée et à la sortie du milieu une lame quart d'onde (voir schéma 2.1). Supposons que la source émette des ondes polarisées linéairement selon l'axe x et que le détecteur soit orienté de telle façon que cela soit la composante x du champ électrique qui soit mesurée. Appelons ϕ_{in} l'angle entre l'axe x et l'axe rapide de la lame quart d'onde à l'entrée du milieu et ϕ_{out} l'angle entre l'axe x et l'axe rapide de la lame quart d'onde en sortie du milieu (voir figure 2.2). La rotation des deux lames quart d'onde permet de faire varier ϕ_{in} et ϕ_{out} ce qui revient à faire varier le degré d'éllipticité des ondes. Ainsi si $\phi_{in} = \pi/4$, nous obtenons une onde incidente polarisée circulairement à droite et si $\phi_{in} = -\pi/4$, nous obtenons une onde polarisée circulairement à gauche. Ce schéma expérimental permet d'éliminer la corrélation fortuite engendrée par les câbles d'alimentation puisque la source et le détecteur restent fixes.

Appelons $I(\phi_{in}, \phi_{out})$ l'intensité mesurée lorsque les angles formés par les axes rapides des deux lames quart d'onde avec l'axe x sont ϕ_{in} et ϕ_{out} . Nous pouvons maintenant définir la fonction de corrélation de l'intensité transmise

$$C(\phi_{in}, \phi_{out}) \equiv \frac{\langle I(\phi_{in}, \phi_{out}) I(-\pi/4, -\pi/4) \rangle - \langle I(\phi_{in}, \phi_{out}) \rangle \langle I(-\pi/4, -\pi/4) \rangle}{\langle I(\phi_{in}, \phi_{out}) \rangle \langle I(-\pi/4, -\pi/4) \rangle}.$$

Cette fonction de corrélation est l'analogue de la fonction de corrélation (3.1) mais pour des polarisations circulaires.

On peut montrer que la fonction de corrélation $C(\phi_{in}, \phi_{out})$, pour un milieu quasi 1D

de longueur L de longueur d'absorption L_a , prend la forme

$$\begin{aligned} C(\phi_{in}, \phi_{out}) &= \frac{1}{2}(1 - \sin 2\phi_{in})\frac{1}{2}(1 - \sin 2\phi_{out}) \\ &+ \frac{1}{g_{pol}^0}F_2(0, L/L_a) \left[\frac{1}{2}(1 - \sin 2\phi_{in}) + \frac{1}{2}(1 - \sin 2\phi_{out}) \right] \\ &+ \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a), \end{aligned}$$

où les fonctions F_2 et F_3 sont données par les relations (2.26) et (2.28) du chapitre 2. Nous voyons que si $\phi_{in} = \pi/4$ et $\phi_{out} = \pi/4$ alors $C(\phi_{in}, \phi_{out}) = \left(\frac{1}{g_{pol}^0} \right)^2 F_3(L/L_a)$. En d'autres termes la fonction de corrélation de l'intensité transmise lorsque les ondes incidentes et émergentes sont croisées (mais maintenant au sens des polarisations circulaires, c'est-à-dire circulaire gauche et circulaire droite), est donnée par le terme $C^{(3)}$. Nous espérons que cette méthode permettra de mesurer avec une très grande précision la fonction de corrélation $C(\phi_{in}, \phi_{out})$ ce qui nous permettrait de confronter à l'expérience les théories de P. Brouwer et R. Pnini sur la valeur de $C^{(3)}$.

Deuxième partie

La mésoscopie des ondes sismiques

Chapitre 1

La Coda sismique vue par un physicien : la mésoscopie des ondes sismiques

1.1 Introduction

Il peut sembler “étrange” que des physiciens de la matière condensée s’intéressent à la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre: c’est d’habitude le champ d’étude des géophysiciens. De fait notre démarche sera un peu différente de celle adoptée par les sismologues qui cherchent à mieux comprendre les structures internes de la terre. Nous allons plutôt étudier la propagation des ondes sismiques comme nous étudierions la propagation des électrons dans les métaux, ou de la lumière dans un milieu désordonné, et notre but sera de mieux comprendre le comportement des ondes élastiques dans des milieux complexes. Dans un certain sens nous nous intéresserons à la mésoscopie des ondes sismiques.

Ce premier chapitre est dédié à l’introduction de la coda des sismogrammes [1, 2, 3, 4, 5, 6] et au contexte général qui motive cette étude. Dans un premier temps nous allons présenter la structure interne de la terre [7] pour ensuite nous concentrer sur la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre. Pour cela nous présenterons l’équation des ondes élastiques [8, 9, 10] ainsi que les coefficients de réflexion et de transmission à la surface de la terre et à la discontinuité entre la croûte et le manteau [9]. Nous présenterons aussi les conversions de modes lorsqu’une onde diffuse sur une hétérogénéité [4, 11, 12, 13,

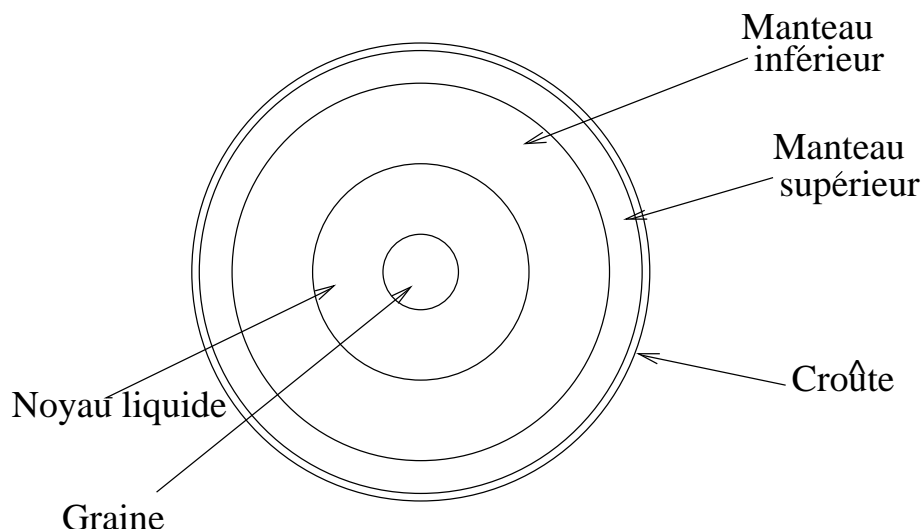


FIG. 1.1 - Représentation simplifiée des différentes parties constituant la structure interne de la terre.

14]. Ceci nous permettra d'introduire deux modèles de la coda des sismogrammes [2, 4] ainsi que le concept d'équipartition des modes [15, 16, 17, 18, 19].

1.2 La structure interne de la terre

La connaissance de l'intérieur de la terre repose en grande partie sur les études sismologiques. Lors de l'analyse des ondes émises par les séismes, on utilise souvent l'analogie optique qui définit par équivalence aux rayons optiques des rais sismiques. Dans cette analogie les rayons sismiques traversent la terre selon des chemins courbés car les vitesses de propagation changent avec la profondeur. Les temps de propagation des ondes dépendent du trajet parcouru mais surtout des réflexions et réfractions sur les structures internes de la terre. L'identification des différents temps d'arrivée permet d'identifier les discontinuités formant la structure de la terre [7, 8, 9, 10].

Dans les modèles sismologiques globaux, tel PREM [7], la terre est divisée en coquilles sphériques séparées par des discontinuités géophysiques. Chacune des coquilles a des propriétés chimiques et physiques différentes. De façon schématique, les 6400 km du rayon de la terre sont décomposés comme indiqué en figure 1.1.

1. En partant du centre nous avons d'abord une sphère solide d'environ 1200 km de rayon qui est appelée *graine* [7]. La graine est essentiellement constituée de fer

cristallin.

2. Au-dessus de la graine il y a le *noyau liquide* sur une épaisseur de 2250 km [7]. Comme la graine, le noyau liquide est essentiellement constitué de fer. Il est le siège de la géodynamo qui est le mécanisme créant le champ magnétique terrestre. Il a des propriétés particulières vis-à-vis des ondes sismiques puisque, étant liquide, les ondes sismiques de cisaillement ne peuvent le traverser. Le noyau liquide tend à diminuer de volume car la graine se solidifie lentement.
3. Vient ensuite le *manteau inférieur* sur une épaisseur de 2200 km [7]. L'interface entre le noyau liquide et le manteau inférieur est une discontinuité très importante car il marque la séparation entre un fluide (noyau liquide) et un milieu solide qui ont des propriétés physiques complètement différentes. Le manteau inférieur représente 55% du volume de la terre.
4. Au-dessus du manteau inférieur se trouve le *manteau supérieur* qui s'étend sur 650 km et représente 27% du volume du globe [7].
5. En dernier la *croûte* terrestre épaisse de seulement quelques dizaines de kilomètres. Son épaisseur est relativement variable : de 30 km en moyenne sous les continents, elle est de l'ordre de 10 km sous les océans. Elle représente un volume très faible, de l'ordre de 1% du volume terrestre total. La séparation entre la croûte et le manteau supérieur (discontinuité de Mohorovicic aussi appelée *Moho*) a été découverte en 1909 et est caractérisée par un contraste de vitesse relativement fort (les vitesses de propagation des ondes sont 30% plus élevées dans la partie supérieure du manteau) [7].

La description précédente de la structure interne de la terre est extrêmement sommaire car, dans chacune des parties, les propriétés chimiques et physiques sont modifiées par les variations de pression et de température avec la profondeur. Dans cette deuxième partie du mémoire nous allons étudier un aspect de la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre; pour cette raison nous ne nous intéresserons que peu aux autres structures.

1.3 Equation d'onde élastique

Les séismes libèrent des quantités gigantesques d'énergie. Cette énergie est dissipée en partie par fracturation des roches et en partie sous la forme d'ondes sismiques. La

propagation des ondes sismiques est régie par l'équation des ondes élastiques, ou équation de Lamé, qui est le reflet de l'équilibre local des forces dans un milieu élastique. Pour un volume infinitésimal dV , l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit, en supposant implicite la sommation sur les indices répétés [8, 9, 10],

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial^k \sigma_{ik}, \quad (1.1)$$

où ρ est la densité locale, u_i la composante i du déplacement \mathbf{u} et σ_{ik} le tenseur des contraintes défini par [8, 9, 10],

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i), \end{aligned} \quad (1.2)$$

où ε est le tenseur des déformations. Les paramètres λ et μ sont les coefficients de Lamé; ils ne sont pas forcément constants dans le milieu. En insérant l'expression (1.2) du tenseur des contraintes dans l'équation (1.1), il est facile d'obtenir l'expression générale suivante pour le champ de déplacements \mathbf{u}

$$\rho \partial_{tt} u_i - (\lambda + \mu) \partial_i (\partial^k u_k) - \mu (\partial_j \partial^j) u_i = (\partial_i \lambda) (\partial^k u_k) + 2(\partial^j \mu) \varepsilon_{ji}. \quad (1.3)$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas fait d'hypothèse sur les paramètres ρ , λ et μ . Remarquons que l'équation (1.3) fait intervenir les dérivées spatiales des paramètres de Lamé, λ et μ . La densité joue, quant à elle, un rôle similaire à l'indice de réfraction optique.

Si nous supposons que les coefficients de Lamé ainsi que la densité sont constants, nous obtenons l'équation d'onde pour le déplacement \mathbf{u} [8, 9, 10]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (1.4) décrit une onde volumique longitudinale qui se propage avec la vitesse $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ alors que le troisième terme correspond aux ondes volumiques transversales qui se propagent avec la vitesse $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$. Le déplacement des ondes transversales s'effectue selon deux directions perpendiculaires à la direction de propagation ce qui implique qu'il y a deux états de polarisation possibles. La vitesse de propagation des ondes de compression est supérieure à la vitesse des ondes de cisaillement et ce sont elles qui sont détectées en premier (voir figure 1.2). Pour cette raison elles sont aussi appelées ondes P pour *Primary waves*. Les ondes de cisaillement sont aussi appelées ondes S car elles se propagent plus lentement que les ondes P et sont détectées en second, *Secondary waves* (voir figure 1.2). Les ondes S ne peuvent pas se propager

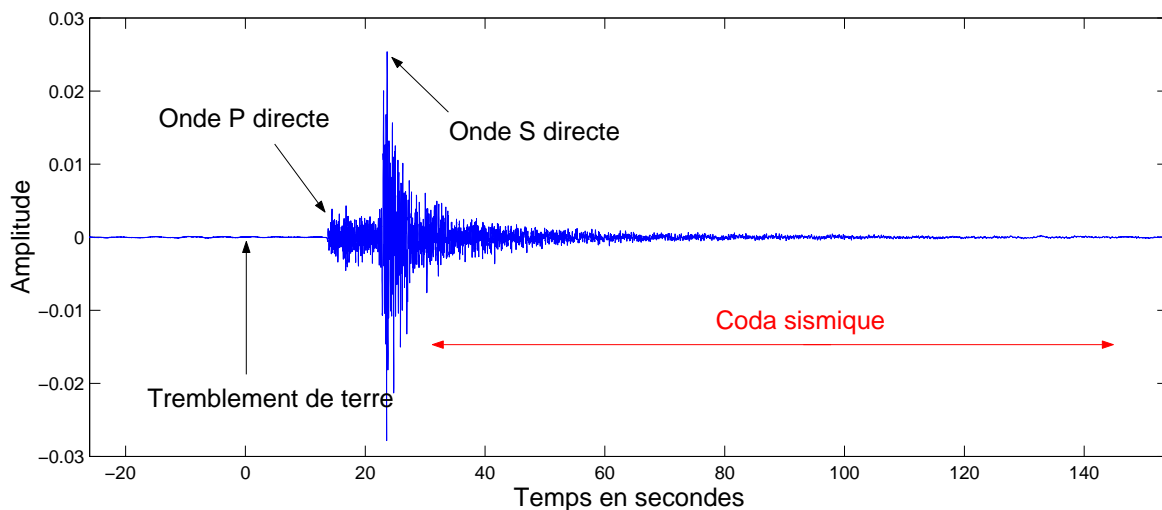
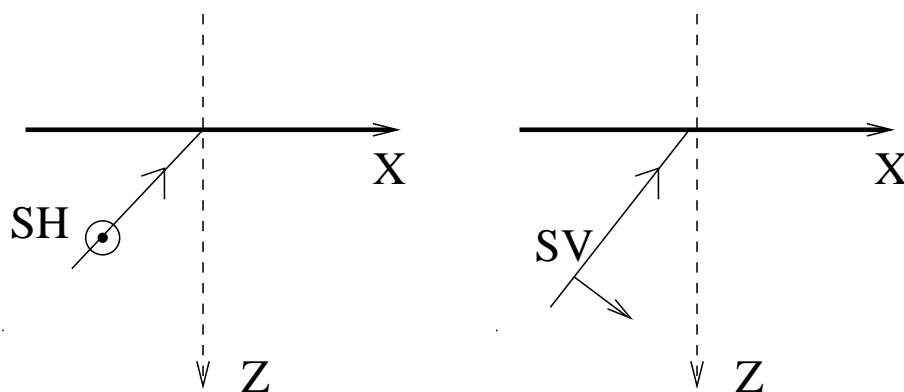


FIG. 1.2 - Sismogramme d'un tremblement de magnitude 4.3 sur l'échelle de Richter enregistré au Mexique en 1998. La distance entre l'épicentre et le réseau de sismomètres est de 30km. Nous voyons distinctement les arrivées des ondes directes P et S .

dans les liquides (comme le noyau externe) car ceux-ci ne supportent pas les contraintes de cisaillement. Dans un milieu homogène les ondes P et S se propagent indépendamment les unes des autres. C'est seulement par réflexion ou réfraction sur les interfaces ou lors de diffusions sur des hétérogénéités que des conversions de modes apparaissent [8, 9, 10]. Par ailleurs, les réflexions sur la surface de la terre donnent naissance aux ondes de Rayleigh qui sont des ondes de surface propagatives. Les ondes de Rayleigh sont un mélange d'ondes de cisaillement et d'ondes de compression et se propagent à une vitesse 10% inférieure à celle des ondes de cisaillement [8, 9, 10]. Une grande partie des dégâts causés par les tremblements de terre est due aux ondes de Rayleigh.

Les vitesses de propagation des ondes sismiques varient avec la profondeur [7]. Pour illustration, elles sont de l'ordre de $v_s \approx 3.5$ km/s et $v_p \approx 6$ km/s dans la croûte (ce qui correspond à $\lambda = \mu$), $v_s \approx 7$ km/s et $v_p \approx 12$ km/s dans le manteau inférieur et $v_s \approx 3.7$ km/s et $v_p \approx 11$ km/s dans la graine [7]. Le temps nécessaire pour traverser la croûte est d'une dizaine de secondes et de 20 minutes pour traverser la terre de part en part.

FIG. 1.3 - Définition des deux polarisations SH et SV .

1.3.1 Conversions de modes par réflexion aux interfaces

Dans cette section nous allons présenter les coefficients de réflexion et de réfraction à la surface de la terre et au Moho (que nous supposerons plan) en tenant compte des conversions de mode. Les valeurs des vitesses de propagation ainsi que celles des densités dans la croûte et dans le manteau supérieur seront prises égales à

$$\begin{aligned}
 v_s &= 3.5\text{km/s}, & v_p &= 6\text{km/s}, & \rho &= 3 \times 10^3\text{kg/m}^3 & \text{ dans la croûte,} \\
 v'_s &= 4.7\text{km/s}, & v'_p &= 8\text{km/s}, & \rho' &= 3.3 \times 10^3\text{kg/m}^3 & \text{ dans le manteau.}
 \end{aligned}$$

Conventionnellement les deux états de polarisation des ondes S sont appelés SV et SH . Les ondes SH ont un déplacement dans le plan XY qui est parallèle à l'interface alors que les ondes SV ont leurs déplacements dans le plan perpendiculaire à l'interface et contenant le vecteur d'onde \mathbf{k} [9] (voir figure 1.3). Les angles e et e' désigneront les angles que forment les directions de propagation des ondes P dans la croûte et le manteau (voir les figures 1.4 et 1.6). De même nous appellerons f l'angle que forme la direction de propagation des ondes SV ou SH avec la verticale dans la croûte et f' l'angle des ondes SV ou SH dans le manteau (voir figures 1.4 et 1.6).

Les coefficients de réflexion de l'énergie, que nous noterons par un exposant E , sont liés aux coefficients de réflexion du champ (notés avec un exposant a) par les relations

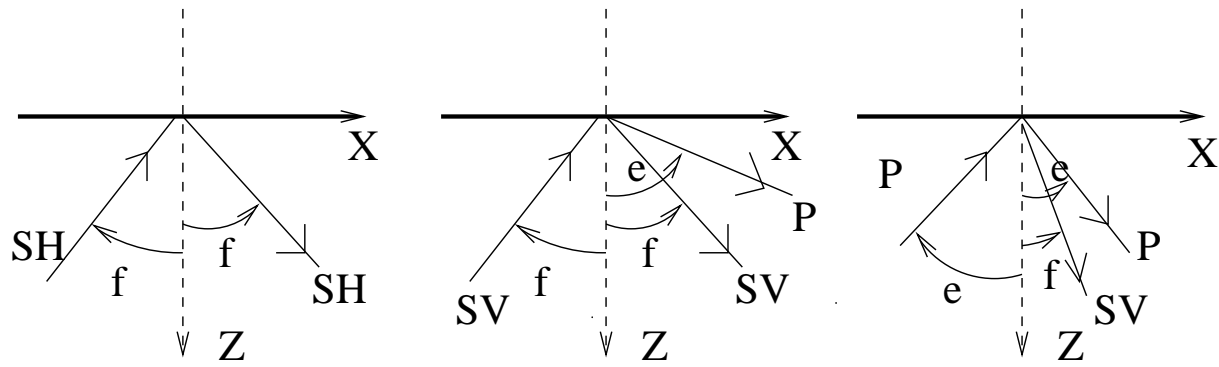


FIG. 1.4 - Définition des angles de réflexion à la surface libre.

suivantes [4],

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{SV,P}^E = |R_{SV,P}^a|^2 \frac{\sin 2e}{\sin 2f}, \\ R_{P,SV}^E = |R_{P,SV}^a|^2 \frac{\sin 2f}{\sin 2e}, \\ R_{SV,SV}^E = |R_{SV,SV}^a|^2, \\ R_{P,P}^E = |R_{P,P}^a|^2, \\ R_{SH,SH}^E = |R_{SH,SH}^a|^2, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{SV,P}^E = |T_{SV,P}^a|^2 \frac{\sin 2e}{\sin 2f}, \\ T_{P,SV}^E = |T_{P,SV}^a|^2 \frac{\sin 2f}{\sin 2e}, \\ T_{SV,SV}^E = |T_{SV,SV}^a|^2, \\ T_{P,P}^E = |T_{P,P}^a|^2, \\ T_{SH,SH}^E = |T_{SH,SH}^a|^2. \end{array} \right.$$

Les indices P , SV et SH indiquent les différents types d'ondes. Ainsi $R_{SV,P}^a$ est le coefficient de réflexion en amplitude d'une onde incidente de type SV en une onde émergente de type P . La conservation de l'énergie impose la relation suivante sur les coefficients de réflexion et de transmission,

$$\forall i \in [P, SV, SH] \quad \sum_{\text{modes } j} R_{i,j}^E + T_{i,j}^E = 1.$$

Réflexion à la surface de la terre

La surface de la terre obéit aux conditions de surface libre qui imposent une traction nulle, $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ et l'absence d'ondes transmises [8, 9, 10].

Une onde SH incidente sur la surface de la terre avec l'angle f est réfléchié en une onde SH avec le même angle. Les ondes SH ne sont pas couplées aux ondes SV et P , par conséquent [9],

$$\begin{aligned} R_{SH,SH}^a &= 1, \\ R_{SH,SV}^a &= 0, \\ R_{SH,P}^a &= 0. \end{aligned}$$

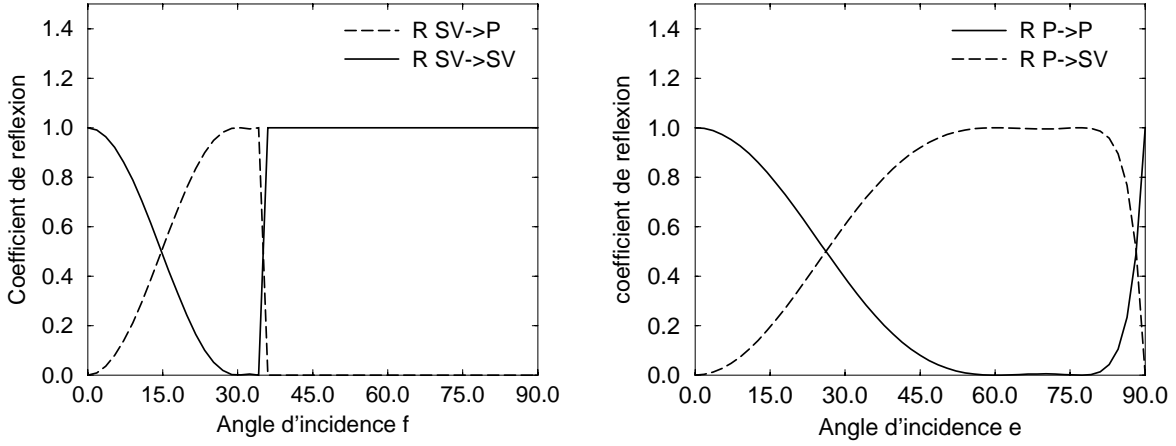


FIG. 1.5 - Représentation graphique des coefficients de réflexion de l'énergie à la surface de la terre.

Une onde plane SV incidente sous un angle f est réfléchié en une onde plane SV qui forme un angle f avec la verticale et une onde plane P qui forme un angle e avec la verticale (voir figure 1.4). Les angles e et f sont liés par la relation de Snell-Descartes [9],

$$\frac{\sin f}{v_s} = \frac{\sin e}{v_p}. \quad (1.5)$$

Comme $v_p > v_s$ il existe un angle critique, $f_1 = \arcsin(v_s/v_p) \approx 35.6^\circ$, pour lequel l'onde SV incidente donne naissance à une onde P parallèle à la surface libre. Les coefficients de réflexion du champ de déplacement sont donnés par les relations [9],

$$\begin{aligned} R_{SV,SV}^a &= \frac{\sin 2e \sin 2f - (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}{\sin 2e \sin 2f + (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}, \\ R_{SV,P}^a &= \frac{(v_p/v_s) \sin 4f}{\sin 2e \sin 2f + (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}, \\ R_{SV,SH}^a &= 0. \end{aligned}$$

La représentation graphique des coefficients de réflexion de l'énergie, $R_{SV,SV}^E$ et $R_{SV,P}^E$, est donnée en figure 1.5 en fonction de l'angle d'incidence f .

Une onde plane P incidente sur la surface de la terre sous un angle e est réfléchié en une onde plane P et une onde SV qui forment des angle e et f avec la verticale (voir figure 1.4). Les angles e et f sont liés par la relation de Snell-Descartes (1.5). Comme $v_p > v_s$ il n'y a pas d'angle critique de réflexion. Les coefficients de réflexion du champ

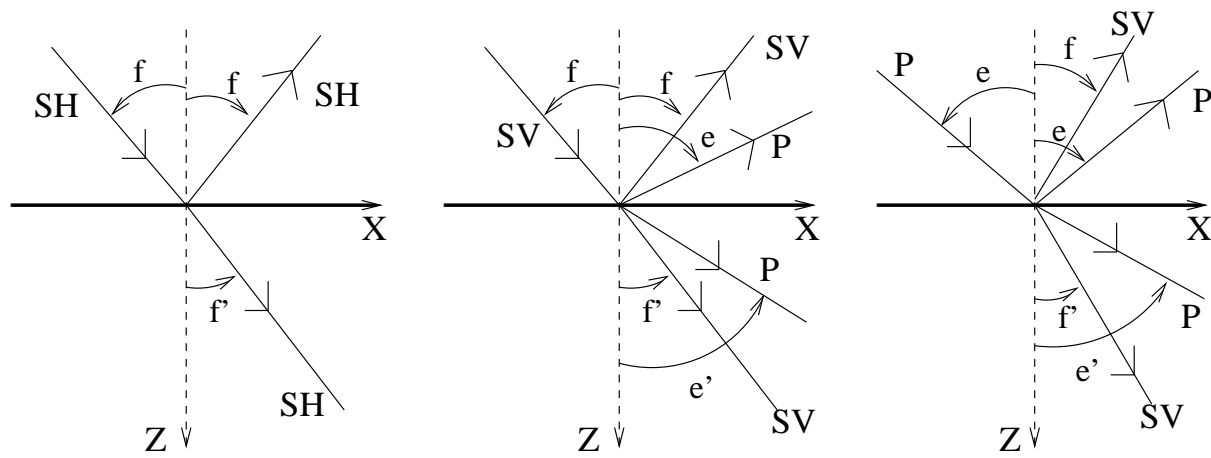


FIG. 1.6 - Définition des angles de réflexion et de réfraction au Moho.

sont [9],

$$\begin{aligned}
 R_{P,P}^a &= \frac{\sin 2e \sin 2f - (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}{\sin 2e \sin 2f + (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}, \\
 R_{P,SV}^a &= \frac{-2(v_p/v_s) \sin 2e \sin 2f}{\sin 2e \sin 2f + (v_p/v_s)^2 \cos^2 2f}, \\
 R_{P,SH}^a &= 0.
 \end{aligned}$$

La représentation graphique de $R_{P,P}^E$ et $R_{P,SV}^E$ en fonction de l'angle d'incidence e est donnée en figure 1.5.

Réflexion et réfraction au Moho

Les coefficients de réflexion et de réfraction au Moho ont des expressions analytiques particulièrement lourdes car ils dépendent aussi bien des vitesses que des densités dans la croûte et le manteau [8, 9, 10]. Aussi nous ne donnerons pas ici leurs expressions analytiques explicites et nous nous contenterons de la représentation graphique des coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie dans le cas de la discontinuité croûte-manteau ainsi que les expressions des angles critiques.

Une onde SH incidente de la croûte sur le Moho avec un angle f est réfléchi et réfractée en ondes SH. Les angles f et f' formés par les directions de propagation par rapport à la verticale sont liés par la relation [9],

$$\frac{\sin f}{v_s} = \frac{\sin f'}{v'_s}.$$

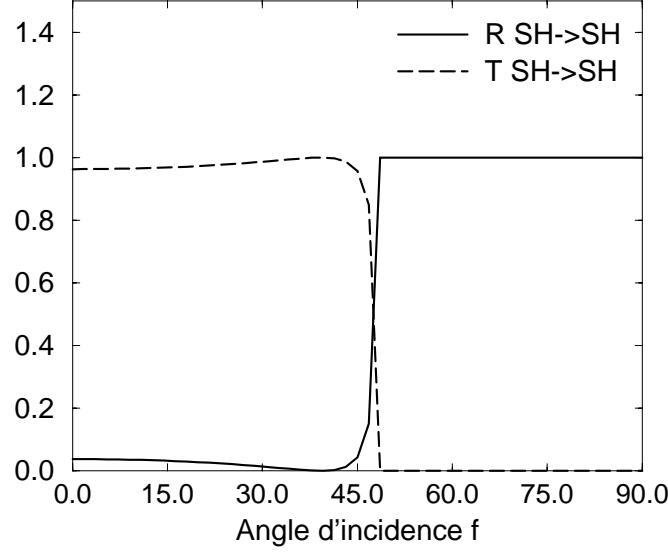


FIG. 1.7 - Représentation graphique des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde SH incidente sur le Moho avec un angle f .

Comme $v_s < v'_s$ il existe un angle critique, $f_1 = \arcsin(v_s/v'_s) \approx 48^\circ$, pour lequel l'onde SH est transmise parallèlement à l'interface croûte-manteau. La représentation graphique de $R_{SH,SH}^E$ et $T_{SH,SH}^E$ en fonction de l'angle d'incidence f est donnée à la figure 1.7.

Une onde plane SV incidente de la croûte sur le Moho avec un angle f est réfléchiée en une onde SV et une onde P , et est réfractée en une onde SV et une onde P (voir figure 1.6). Les angles f , f' , e et e' sont liés par la relation [9],

$$\frac{\sin f}{v_s} = \frac{\sin f'}{v'_s} = \frac{\sin e}{v_p} = \frac{\sin e'}{v'_e}. \quad (1.6)$$

Comme $v_s < v'_s < v_p < v'_p$, il existe trois angles critiques. Pour $f > f_1 = \arcsin(v_s/v'_p) \approx 26^\circ$, l'onde P transmise est horizontale. Si $f > f_2 = \arcsin(v_s/v_p) \approx 35.7^\circ$, l'onde P est réfléchiée horizontalement. Enfin si $f > f_3 = \arcsin(v_s/v'_s) \approx 48.1^\circ$, l'onde SV transmise dans le manteau est horizontale. La représentation graphique de $R_{SV,SV}^E$, $R_{SV,P}^E$, $T_{SV,SV}^E$ et $T_{SV,P}^E$ en fonction de l'angle d'incidence f est donnée en figure 1.8.

Finalement une onde plane P est réfléchiée en une onde SV et une onde P , et est réfractée en une onde SV et une onde P (voir figure 1.6). Les angles f , f' , e et e' sont liés par la relation (1.6). Comme $v'_s < v_p < v'_p$, il y a un angle critique, $e_1 = \arcsin(v_p/v'_p) \approx 48.6^\circ$, pour lequel l'onde P transmise dans le manteau est horizontale. La représentation graphique de $R_{SV,SV}^E$, $R_{SV,P}^E$, $T_{SV,SV}^E$ et $T_{SV,P}^E$ en fonction de l'angle d'incidence f est donnée

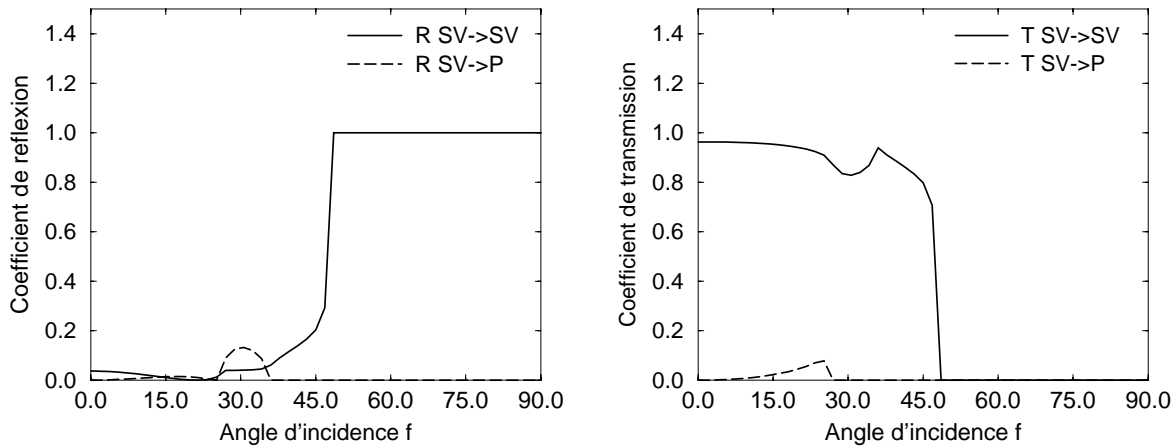


FIG. 1.8 - Représentation graphique des coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie d'une onde SV incidente sur le Moho avec un angle f .

en figure 1.9.

1.4 Les différents types d'enregistrements sismiques

Les phénomènes géophysiques sont très riches en grande partie du fait que de nombreux paramètres varient sur plusieurs ordres de grandeur. Par exemple l'analyse spectrale des ondes émises par un tremblement de terre s'étend de 10^{-4} Hz à 10^{+2} Hz soit six ordres de grandeur. Les très basses fréquences sont associées aux modes de vibration globaux de la terre. Lors d'un séisme particulièrement énergétique, la terre entre en vibration comme un résonateur géant [10]. A l'opposé, pour les hautes fréquences, $f > 1$ Hz, l'image des rayons s'applique et le pouvoir de résolution de ces ondes sismiques est beaucoup plus grand. En fonction du domaine de fréquences choisies les phénomènes observés sont complètement différents.

Dans les sections et chapitres qui suivent nous nous placerons toujours dans le régime des hautes fréquences c'est-à-dire $1 \text{ Hz} < f < 20 \text{ Hz}$, les longueurs d'ondes sont alors de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres. Ceci est à comparer à l'épaisseur H de la croûte, environ 30 km, par conséquent nous nous placerons dans la limite où $\lambda_{s,p} \ll H$.

En fonction de la distance entre le séisme et les sismomètres et suivant la fréquence d'observation, les enregistrements sismiques sont le reflet de la propagation des ondes sismiques dans différentes parties de la terre. Si la source est à moins de 100 km du

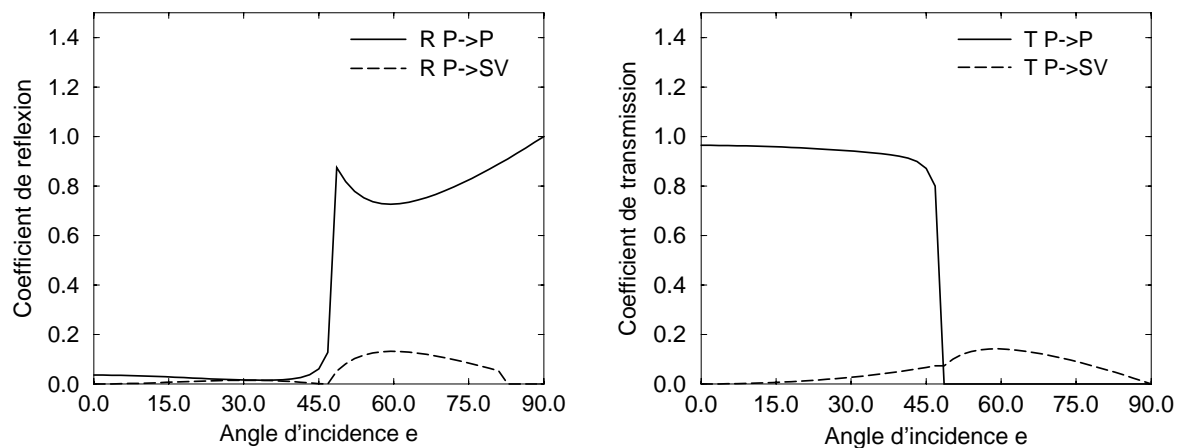


FIG. 1.9 - Représentation graphique des coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie d'une onde P incidente sur le Moho avec un angle e .

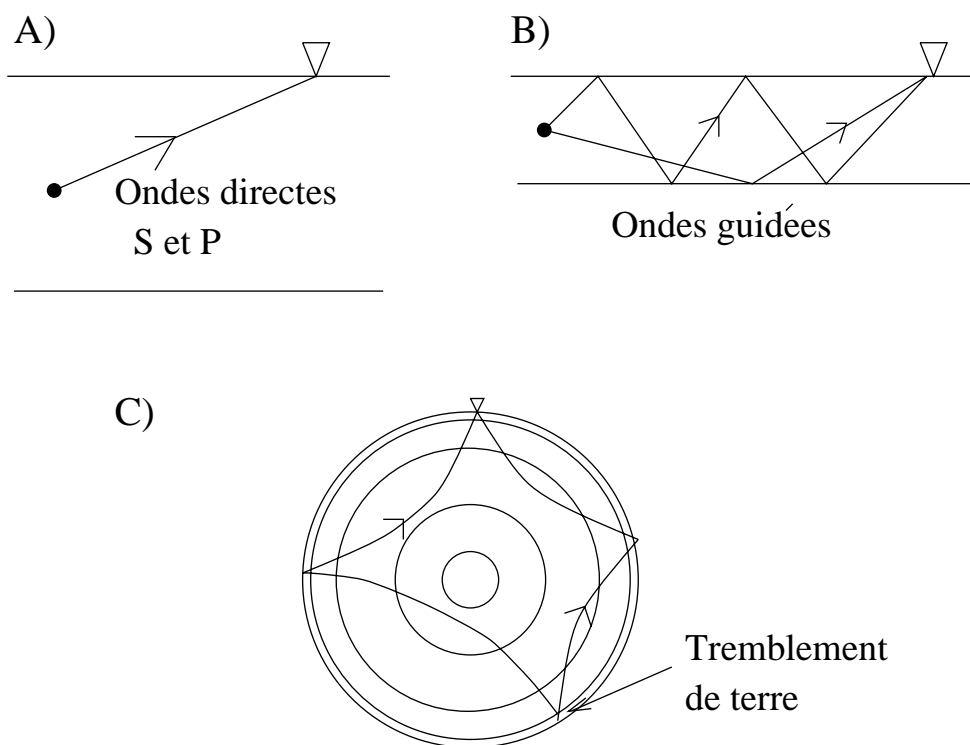


FIG. 1.10 - La figure A représente un tremblement de terre local alors que la figure B est un événement régional qui met en jeu les ondes guidées de la croûte. La figure C représente un événement télé-sismique pour lequel les ondes sismiques ont parcouru entièrement la terre.

réseau de détection on parle d'un événement local. Les ondes sismiques mesurées se sont principalement propagées dans la croûte terrestre et révèlent des propriétés locales (voir figure 1.10A). Lorsque la distance entre le séisme et la station d'enregistrement est plus grande (de cent à plusieurs centaines de kilomètres) nous avons affaire à un événement dit régional. Le contraste de vitesses au Moho entre le manteau supérieur et la croûte fait qu'il existe des angles critiques de réflexion au Moho (voir la section 1.3.1) [8, 9] : la croûte terrestre est un guide d'ondes sismiques. Les sismogrammes sont le reflet de ces ondes guidées (voir figure 1.10B). Finalement, lorsque la distance source-détecteur est très grande, jusqu'à l'échelle de la terre, on parle d'événements télé-sismiques. Pour une source suffisamment énergétique, les ondes émises se propagent dans le manteau supérieur et inférieur, le noyau liquide et la graine, avant d'être mesurées. Les ondes ont alors exploré la terre entièrement et révèlent les structures internes du globe (voir figure 1.10C).

1.5 La Coda sismique : une signature du désordre?

Le sismogramme d'un tremblement de terre local est bien plus complexe qu'une simple succession d'arrivées d'ondes directes S et P [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Après ces arrivées, le sol continue à vibrer pendant plusieurs minutes avant que de retrouver le seuil du bruit sismique (voir figure 1.2). Cette partie des sismogrammes est appelée la *coda sismique* ou la *coda des sismogrammes*. La coda sismique s'étend sur plusieurs minutes alors qu'une source sismique ne dure que quelques secondes [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Elle représente la majorité d'un enregistrement sismique et a un poids énergétique de l'ordre de 30% de l'énergie totale mesurée. Elle est apparemment formée d'une succession d'ondes incohérentes qui arrivent de toutes les directions en même temps [6], mais elle n'est en rien assimilable à du "bruit" car elle possède des propriétés étonnantes. Deux tremblements de terre situés en un même site, mais à des années d'intervalle, présentent des codas sismiques parfaitement identiques [20]. Il est même possible de superposer parfaitement, une à une, les oscillations des deux sismogrammes [20].

Les premières études de la coda sismique sont dues à Aki et à Aki et Chouet à la fin des années 1960 et au début des années 1970 [1, 2]. Ils ont montré que la décroissance temporelle de l'énergie dans la coda est toujours exponentielle et est bien décrite par la relation [2],

$$E(t, \omega) \propto \frac{1}{t^\gamma} \exp\left(-\frac{\omega t}{Q_c}\right), \quad (1.7)$$

où t est le temps, $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence et γ un paramètre variant entre 1 et 2. Le

facteur de qualité Q_c détermine la décroissance de l'énergie dans la coda. Plus Q_c est grand et plus la décroissance de l'énergie est lente et la coda longue. Les observations montrent que Q_c est indépendant de la nature de la source, de sa position, de sa magnitude et est très stable dans une zone géographique donnée [4, 5]. Il apparaît comme le paramètre le plus facile à mesurer avec les amplitudes des ondes directes P et S [4, 5]. Par ailleurs la valeur de Q_c croît plus ou moins linéairement avec la fréquence et semble se stabiliser pour les hautes fréquences ($f > 10\text{Hz}$) [4, 21, 22].

Le facteur de qualité Q_c a été mesuré dans de nombreuses régions du globe. Aux États-Unis pour une fréquence de 1 Hz, il varie de 1200 dans les Apalaches à 80 dans certaines régions tectoniquement actives de la Californie [23]. En France, à 2 Hz, il est de l'ordre de 600 [24]. La corrélation entre les variations régionales de Q_c et la tectonique est grande, ce qui laisse à penser que Q_c reflète les propriétés du milieu dans lequel se propagent les ondes.

Le défi théorique est de comprendre la coda des sismogrammes. Pour cela il faut trouver un mécanisme expliquant comment certaines ondes sismiques peuvent parcourir plusieurs centaines de kilomètres (deux minutes de coda représentent environ 700 km de propagation pour les ondes P) avant d'être détectées, tandis que les ondes directes ne parcourent que quelques dizaines de kilomètres. Deux modèles ont été proposés pour expliquer les caractéristiques de la coda sismique. Tous deux supposent que le milieu dans lequel se propagent les ondes est hétérogène. La coda est le résultat de chemins de propagation plus ou moins longs dus aux diffusions sur ces hétérogénéités. Mais avant de présenter ces deux modèles, nous allons discuter des propriétés des ondes en milieux hétérogènes et plus particulièrement des conversions de modes des ondes élastiques par diffusion.

1.5.1 Atténuation d'une onde cohérente scalaire par diffusion

Lorsqu'une onde traverse un milieu hétérogène, la partie cohérente du champ voit son amplitude diminuer exponentiellement avec la distance de propagation L [3, 4, 25, 26, 27],

$$u_{coh} = e^{-\frac{L}{l}} u_0, \quad (1.8)$$

où l est la longueur d'extinction. La longueur d'extinction l représente la distance moyenne entre chaque diffusion. Il ne faut pas la confondre avec le libre parcours moyen de transport l^* qui correspond à la distance au bout de laquelle une onde perd la mémoire de sa direction initiale [4, 25]. Pour des diffuseurs qui ont des sections efficaces différentielles piquées vers l'avant, l^* peut être très grand devant la longueur d'extinction [4, 25, 26].

L'atténuation du champ cohérent (1.8) n'est pas due à l'absorption mais aux diffusions sur les hétérogénéités du milieu qui transforment une partie du champ cohérent en champ diffus (ou incohérent) [26],

$$u = u_{coh} + u_d = \langle u \rangle + u_d.$$

Le champ diffus change d'une réalisation à l'autre du désordre et sa valeur moyenne sur les réalisations du désordre est nulle.

Pour le cas simplifié d'une onde scalaire, le champ u est solution de l'équation d'onde

$$\frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta u(\mathbf{r}, t) = 0,$$

où $v(\mathbf{r})$ est la vitesse de propagation de l'onde. Nous supposons que les hétérogénéités induisent des fluctuations de la vitesse décrites par la statistique exponentielle,

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}) &= v_0 + \delta v(\mathbf{r}) = v_0(1 + \xi(\mathbf{r})), \\ \langle \xi(\mathbf{r}) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle = \epsilon^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a}\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation de Born (aussi appelée Rayleigh-Gans) [3, 8], qui est valable lorsque $\epsilon ka \ll 1$ avec $k = 2\pi/\lambda$, on montre que la longueur d'extinction l et le libre parcours moyen de transport l^* sont donnés par

$$l^{-1} = \frac{k^4}{2\pi} \int_0^\pi C(2k \sin \frac{\theta}{2}) \sin \theta d\theta, \quad (1.9)$$

$$l^{*-1} = \frac{k^4}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \theta) C(2k \sin \frac{\theta}{2}) \sin \theta d\theta, \quad (1.10)$$

où θ est l'angle de diffusion et C la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $\langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle$. Dans le cas d'une corrélation exponentielle [3]

$$C(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle = \frac{8\pi\epsilon^2 a^3}{(1 + a^2 q^2)^2}.$$

En insérant la fonction $C(\mathbf{q})$ dans les relations (1.9) et (1.10), et en posant la variable $y = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ il vient

$$l^{-1} = 4\epsilon^2 a^3 k^4 \int_0^2 \frac{y}{(1 + a^2 k^2 y^2)^2} dy = \frac{8\epsilon^2 a^3 k^4}{1 + 4a^2 k^2},$$

$$l^{*-1} = 2\epsilon^2 a^3 k^4 \int_0^2 \frac{y^3}{(1 + a^2 k^2 y^2)^2} dy = 2\epsilon^2 a^3 k^4 \left[\frac{\ln(1 + 4a^2 k^2)}{2a^4 k^4} - \frac{2}{a^2 k^2 (1 + 4a^2 k^2)} \right],$$

par conséquent

$$l = \begin{cases} \left(\frac{v_0^4}{8\epsilon^2 a^3} \right) \frac{1}{\omega^4} & ka \ll 1 \\ \left(\frac{v_0^2}{2\epsilon^2 a} \right) \frac{1}{\omega^2} & ka \gg 1 \end{cases}, \quad l^* = \begin{cases} \left(\frac{v_0^4}{8\epsilon^2 a^3} \right) \frac{1}{\omega^4} & ka \ll 1 \\ \frac{a}{\epsilon^2} & ka \gg 1 \end{cases}$$

Nous remarquons que la longueur d'extinction l est une fonction très sensible de la fréquence. Par contre, lorsque la longueur d'onde est largement plus petite que la longueur de décorrélation a , le libre parcours moyen de transport l^* est indépendant de la fréquence. Ceci aura des implications importantes lors de la description théorique de la coda. En effet, la description du champ diffus u_d fait intervenir le libre parcours moyen de transport l^* et non pas la longueur d'extinction l (voir le section 1.7 par exemple).

1.5.2 Conversions de modes par diffusion

Le terme de droite de l'équation d'onde (1.3) fait intervenir les dérivées des paramètres de Lamé et peut être considéré comme une source de l'équation d'onde. Les variations spatiales des paramètres de Lamé sont la source des conversions de modes dans le milieu.

Nous allons présenter le cas très simplifié des diffuseurs sphériques de Rayleigh-Gans [4, 11, 12, 13, 14] qui correspondent à des inclusions élastiques sphériques de rayons a et de constantes élastiques $\rho + d\rho$, $\lambda + d\lambda$ et $\mu + d\mu$ pour lesquels le produit de la fluctuation $d\rho$, $d\lambda$ et $d\mu$ et de $k_{s,p}a$ est petit devant 1 [4, 11, 12, 13, 14]. La théorie élastique de Mie, où les sphères ont des tailles arbitraires devant la longueur d'onde, est très compliquée [28, 29, 30]. Le choix de la géométrie sphérique est simplificateur car, bien évidemment, les hétérogénéités de la croûte terrestre n'ont pas la symétrie sphérique. Néanmoins cette approche apporte des nombreux éléments de compréhension de la diffusion des ondes élastiques.

L'expression du champ diffusé ainsi que les sections efficaces différentielles par un diffuseur de Rayleigh-Gans se trouvent dans la littérature [4, 11, 12, 13, 14]. La représentation graphique des sections efficaces totales Σ_{pp} , Σ_{ps} , Σ_{sp} et Σ_{ss} , normées par la section efficace géométrique πa^2 , en fonction de $k_p a$ sont données sur la figure 1.11 pour des fluctuations réalistes de la densité et des paramètres de Lamé. On remarque que le couplage entre modes S et modes P est important. Ceci montre que la diffusion des ondes élastiques dans un milieu désordonné est un problème où les modes de cisaillement et les modes de compression sont fondamentalement couplés.

Une autre caractéristique particulière des diffuseurs élastiques est que leurs sections efficaces différentielles ne sont jamais isotropes, même dans le cas d'un diffuseur de Rayleigh ($\lambda_{s,p} \gg a$) [4, 14, 25]. La représentation graphique en coordonnées polaires des sections efficaces différentielles pour les régimes de Rayleigh, $k_{s,p}a \ll 1$ et lorsque $k_p a = 1.6$ est donnée à la figure 1.12. On remarque que les diffuseurs de Rayleigh ont tendance à rétrodiffuser les ondes élastiques alors que dans le régime où $k_p a = 1.6$ la diffusion se fait

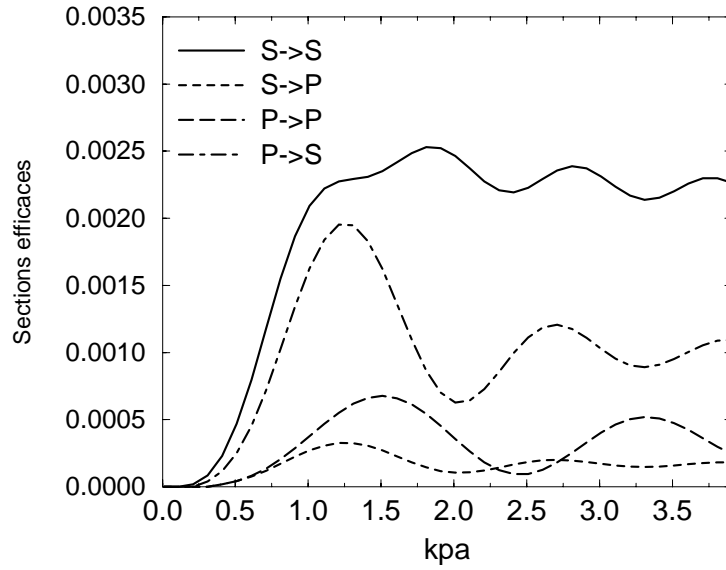


FIG. 1.11 - Représentation graphique des sections efficaces totales Σ_{pp} , Σ_{ps} , Σ_{sp} et Σ_{ss} , normées par la section efficace géométrique πa^2 , en fonction de $k_p a$ lorsque $\delta\lambda/\lambda = \delta\mu/\mu = \delta\rho/\rho = 5\%$.

majoritairement vers l'avant. Cette anisotropie des sections efficaces différentielles a des répercussions importantes sur les propriétés de transport des ondes élastiques dans les milieux désordonnés. La diffusivité des ondes sera plus faible pour un milieu désordonné formé de diffuseurs de Rayleigh que pour des diffuseurs où $k_p a = 1.6$.

Il est aussi important de remarquer la relation suivante entre les sections efficaces [4, 13, 14, 18, 19],

$$\Sigma_{ps} = \left(\frac{2v_p^2}{v_s^2} \right) \Sigma_{sp}. \quad (1.11)$$

Cette propriété est une conséquence de la *réciprocité* spatiale de la fonction de Green et est un résultat très général indépendant de la géométrie des diffuseurs [13]. Le fait que $v_p > v_s$, (1.11) implique que les conversions de modes $P \rightarrow S$ sont plus “efficaces” que les conversions de mode $S \rightarrow P$. L'élasticité tend à favoriser, pour des questions d'espace des phases, les modes de cisaillement (voir aussi la section 1.8.2).

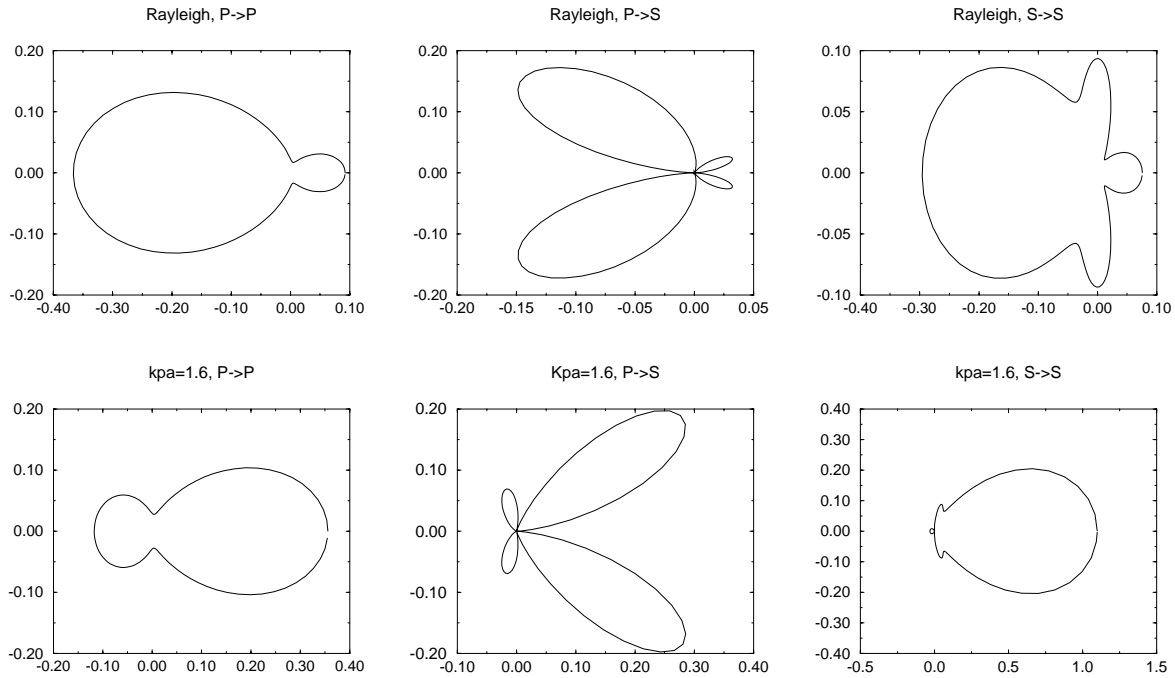


FIG. 1.12 - Représentation graphique en coordonnées polaires des sections efficaces dans le régime de Rayleigh et dans le régime de Rayleigh-Gans où $k_p a = 1.6$. On remarque que les sections efficaces ne sont jamais isotropes, même pour des diffuseurs de Rayleigh.

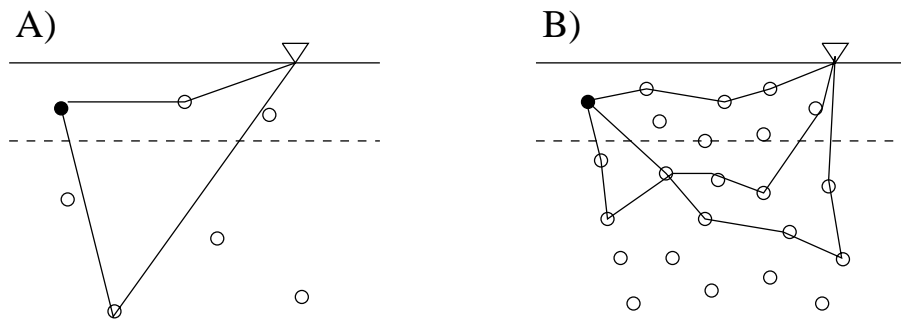


FIG. 1.13 - Dans les modèles A et B la discrimination croûte-manteau marquée par la ligne en pointillés n'est pas prise en compte. Les ondes sismiques se propagent comme dans un milieu semi-infini. En A les ondes de la coda sont simplement diffusées alors que la figure B représente des ondes multiples diffusées.

1.6 Premier modèle : milieu semi-infini absorbant

Pour expliquer les caractéristiques de la coda un premier modèle a été proposé dans les années 1970 par Aki et Chouet [2]. Par la suite, il a été développé par Wu [31], Abubikarov et Gusev [32] et Hoshiya [33] entre autres. Ce modèle considère la terre comme un milieu semi-infini désordonné et néglige la séparation croûte-manteau. Si le milieu est faiblement désordonné, la coda est la marque de la diffusion simple des ondes sur les hétérogénéités. Si le milieu est plus fortement hétérogène les ondes sont diffusées plusieurs fois avant d'être détectées. Pour un milieu simplement diffusant, le fin de la coda correspond à des ondes ayant pénétré de plus de 300 km dans la terre, c'est-à-dire ayant largement exploré le manteau supérieur (voir figure 1.13 A). Pour un milieu multiples diffusant, la profondeur de pénétration des ondes est beaucoup plus faible (voir figure 1.13 B) mais génère de la même façon des arrivées tardives d'ondes.

Dans les modèles le facteur $1/t^\gamma$ de la relation (1.7) est un facteur d'expansion géométrique de la source ($\gamma = 2$ pour le modèle de la diffusion simple et $\gamma = 3/2$ pour le modèle de la diffusion multiple [3]) alors que la décroissance exponentielle de l'énergie dans la coda est attribuée à l'absorption. La forte décroissance temporelle de l'énergie dans la coda suggère une forte atténuation des roches. Ceci semble être en contradiction avec des mesures de décroissance avec la distance de propagation des ondes guidées dans la croûte qui montrent, au contraire, que l'absorption est relativement faible [34]. Par ailleurs, les fortes variations de Q_c avec la fréquence sont difficilement compatibles avec les modèles d'absorption des roches. Dans ces modèles, le facteur de qualité d'absorp-

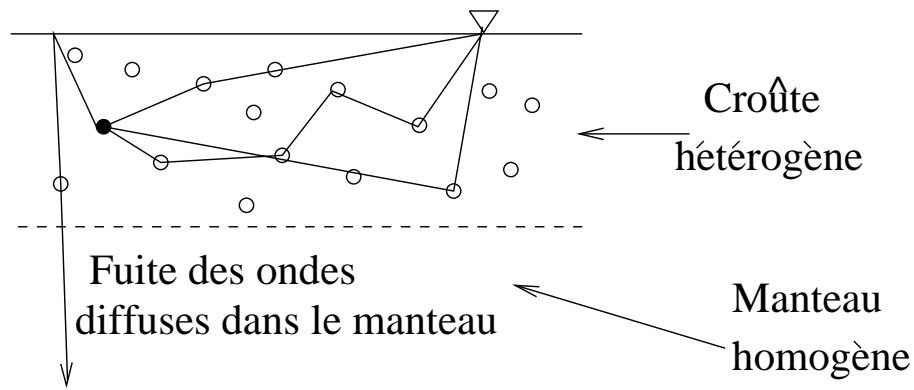


FIG. 1.14 - Dans ce modèle la coda est formée d'ondes diffusées par les hétérogénéités de la croûte. La décroissance exponentielle de l'énergie est due à l'action combinée d'une faible absorption et d'une fuite des ondes sismiques dans le manteau.

tion est indépendante de la fréquence car l'énergie absorbée par cycle est supposée une constante [35].

1.7 Deuxième modèle : diffusion dans la croûte et fuite au Moho

Une des propriétés majeures de la partie supérieure de la terre est la séparation entre le manteau supérieure et la croûte. Cette séparation est le reflet de compositions chimiques différentes, le manteau est homogène chimiquement, formé majoritairement d'olivine dans sa partie supérieure, et a un comportement mécanique ductile [4, 5]. À l'inverse, la croûte est beaucoup plus rigide et est hétérogène chimiquement. Les nombreuses déformations dues à la tectonique ont formé des réseaux de fissures qui sont visibles lors d'expériences de réflexion sismique [4, 5]. La croûte apparaît réfléchissante (et donc hétérogène) alors que le manteau semble plus transparent. De plus, les vitesses de propagation étant plus élevées dans le manteau, la croûte se comporte comme un guide d'ondes (voir la section 1.3.1).

Ces considérations ont amené, à la fin des années 1990, Margerin *et al* à proposer un nouveau modèle pour la coda sismique [4, 21, 22]. Dans ce modèle, la coda est le résultat des diffusions des ondes sismiques sur les hétérogénéités de la croûte. La décroissance exponentielle de l'énergie est due à l'action combinée d'une faible absorption et d'une fuite des ondes sismiques dans le manteau. Le manteau étant homogène, les ondes réfractées au Moho sont "perdues" (voir figure 1.14).

Plusieurs simulations numériques Monte-Carlo de l'équation du transfert radiatif acoustique ont montré que la décroissance énergétique d'un tel modèle est en très bon accord avec la relation (1.7) [4, 21, 22]. La combinaison de la fuite au Moho et de l'absorption permet d'expliquer les fortes variations de Q_c en fonction de la fréquence et des zones géographiques [4, 5]. En effet, la partie du facteur de qualité due à la diffusion dépend de la fréquence alors que la contribution associée à l'absorption est indépendante de la fréquence et tend à dominer pour les hautes fréquences ($f > 10$ Hz) [4, 22]. Ces simulations numériques ont aussi montré l'importance de la diffusion multiple. Les ondes sismiques étant réfléchies au Moho dans la croûte, les temps de propagation sont longs et les séquences de diffusion multiple primordiales pour expliquer quantitativement la coda [4, 5, 22]. Ce modèle de la coda des sismogrammes n'est pas accepté par tous [36] et le débat reste largement ouvert.

Equation de diffusion

Il est très difficile d'étudier analytiquement les propriétés de l'équation du transfert radiatif [37] et l'on doit faire appel aux approches numériques même pour les cas les plus simples [38]. Par contre, après plusieurs diffusions, et dans le cas où le libre parcours moyen est inférieur à l'épaisseur de la croûte ($l_{s,p}^* < H$), l'évolution de l'énergie totale, $E_{tot} = E_s + E_p$, est bien décrite par une équation de diffusion [16, 17, 18, 19]. Cela sera justifié mathématiquement au chapitre 2.2. L'étude de l'équation de diffusion est beaucoup plus facile et permet d'obtenir des résultats analytiques instructifs. Ils correspondent aux solutions asymptotiques de l'équation du transfert radiatif et servent souvent de test aux simulations numériques de l'équation du transfert radiatif [4, 22].

L'équation de diffusion en présence d'absorption s'écrit [16, 17, 18, 19],

$$\partial_t E_{tot}(\mathbf{r}, t) - D_{eq} \Delta E_{tot}(\mathbf{r}, t) = -\frac{E_{tot}(\mathbf{r}, t)}{\tau_a}, \quad (1.12)$$

où τ_a est le temps d'absorption, D_{eq} la constante de diffusion donnée par [16, 17, 18, 19]

$$D_{eq} = \left(\frac{v_s^3}{v_s^3 + 2v_p^3} \right) \frac{v_p l_p^*}{3} + \left(\frac{2v_p^3}{v_s^3 + 2v_p^3} \right) \frac{v_s l_s^*}{3}, \quad (1.13)$$

et l_s^* , l_p^* les libres parcours moyens de transport des ondes S et P . La condition de surface libre impose l'absence de fuite en $z = 0$ soit $\partial E_{tot}(\mathbf{r}, t)/\partial z|_{z=0} = 0$. La fuite au Moho impose $E_{tot}(\mathbf{r}, t)|_{z=H} + z_0 \partial E_{tot}(\mathbf{r}, t)/\partial z|_{z=H} = 0$ où z_0 est la longueur d'extrapolation qui est de l'ordre du libre parcours moyen de transport, $z_0 \approx l^*$ [4, 21]. La longueur

d'extrapolation dépend de la constante de diffusion D_{eq} et des coefficients de réflexion au Moho [4, 21].

On montre que la forme asymptotique de la solution de l'équation (1.12) est indépendante de la source et s'écrit sous la forme [4, 21]

$$E(t) \propto \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right) \exp\left(-D_{eq} \frac{\xi_0^2}{H^2} t\right) \equiv \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\omega t}{Q_c}\right),$$

où t est le temps et ξ_0 la solution de l'équation

$$\xi_0 \tan(\xi_0) = \frac{H}{z_0}, \quad \text{avec } \xi_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Par conséquent le facteur de qualité Q_c est donné par [4, 21],

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_s} \quad \text{avec } Q_a = 2\pi f \tau_a \quad \text{et } Q_s = \frac{2\pi f H^2}{D_{eq} \xi_0^2}.$$

Dans l'hypothèse où τ_a est inversement proportionnel à la fréquence, Q_a est constant. De plus lorsque les corrélations spatiales des fluctuations des coefficients élastiques sont plus grandes que la longueur d'onde, les libres parcours moyens de transport sont indépendants de la fréquence (voir la section 1.5.1). Si l'on se place dans cette situation, Q_s varie comme f et la variation du facteur de qualité Q_c avec la fréquence est

$$\frac{1}{Q_c} = \text{const} + \frac{1}{f}.$$

Ainsi la fuite des ondes diffuses dans le manteau expliquerait la variation de Q_c avec la fréquence. Pour les fréquences faibles cela serait le terme dominant de Q_c , alors que le facteur de qualité d'absorption Q_a dominerait aux hautes fréquences [4, 5, 21, 22]. Ce résultat est a priori limité à des milieux où $\lambda_{s,p} \ll l_{s,p}^* < H$, mais les simulations numériques Monte-Carlo de l'équation du transfert radiatif confirment ce comportement fréquentiel de Q_c même dans le régime où $\lambda_{s,p} \ll H < l_{s,p}^*$ [4, 21, 22].

Des observations de Q_c dans une région tectoniquement active du Mexique sont quantitativement bien décrites par un facteur de qualité d'absorption de l'ordre de $Q_a \approx 1000$ et un libre parcours moyen de vingt à soixante dix kilomètres, pour une croûte épaisse de $H = 30$ km [4, 22]. Un facteur de qualité de $Q_a \approx 1000$ faiblement dépendant de la fréquence est tout à fait compatible avec ce que l'on pense de l'absorption des roches dans la croûte. Le libre parcours moyen ne peut pas être très inférieur à l'épaisseur de la croûte car il est possible de mesurer par réflexion sismique, les ondes réfléchies sur le Moho, ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur du libre parcours moyen de transport que donne ce modèle [4, 22].

1.8 Equipartition de l'énergie

Dans le modèle précédent, la coda serait la manifestation d'ondes multiples diffusées dans la croûte terrestre. Sa décroissance temporelle serait due à l'action combinée de la fuite des ondes diffuses dans un manteau homogène et de l'absorption. Néanmoins, bien que les valeurs d'absorption et de libre parcours moyen nécessaires pour décrire quantitativement la coda soient satisfaisantes, elles ne permettent pas d'affirmer que ce modèle est le "bon". La validation ou l'invalidation de ce modèle apporterait des informations précieuses sur le degré d'hétérogénéité de la croûte et du manteau, qui est mal connu. La multitude de données des sismogrammes pourraient de ce fait être interprétées sous un jour nouveau. On pourrait penser à appliquer à la sismologie les méthodes d'imagerie en milieu diffus qui ont récemment connu de grands progrès en optique et en acoustique.

Pour un champ diffus, tous les modes de vibration du système sont équiprobablement présents. Ainsi même si une source sismique excite des modes de vibration bien particuliers (principalement les modes P pour les explosions et les modes S pour des tremblements de terre) ceux-ci sont convertis vers d'autres modes par les diffusions successives sur les hétérogénéités et finissent par peupler tous les modes de vibration. Ce phénomène a été appelé *équipartition des modes* [15, 16, 17, 18, 19].

L'équipartition présente une propriété remarquable. Bien que le temps nécessaire pour entrer dans le régime équipartitioné soit sensible à la nature du désordre, l'équipartition elle-même en est indépendante. Une des manifestations directes de l'équipartition est que les rapports d'énergie (énergie cinétique sur énergie potentielle ou énergie de cisaillement sur l'énergie potentielle de compression etc) sont constants dans le temps et indépendants du tremblement de terre [15, 16, 17, 18, 19]. Les valeurs des rapports sont dépendantes de la structure exacte des modes de vibration ainsi que de la profondeur où a lieu la mesure.

1.8.1 Equipartition pour un milieu élastique infini

Dans cette section, et pour illustrer notre propos, nous allons calculer les valeurs des rapports d'équipartition de l'énergie pour un milieu élastique infini [15, 16]. Pour un tel milieu, les modes propres sont les ondes planes S et P . Pour une pulsation ω ils sont donnés par

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{v_p^3}} \exp(i(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{v_p} - \omega t)), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u}_s^{a,a'}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{g}}_{a,a'}}{\sqrt{v_s^3}} \exp(i(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{v_s} - \omega t)), \quad (1.15)$$

où \mathbf{k} est un vecteur dans la direction de propagation de norme ω . Le vecteur $\hat{\mathbf{k}}$ est un vecteur unitaire défini par $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/\omega$. Les deux vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{g}}_{a,a'}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation \mathbf{k} . On peut facilement vérifier que ces modes sont normés et orthogonaux entre eux pour le produit scalaire,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.16)$$

Nous allons présenter deux méthodes pour calculer les rapports d'énergie d'un champ équipartitionné. La première est particulièrement simple et très révélatrice des phénomènes mis en jeu, mais ne s'applique qu'au cas du milieu infini. La deuxième est plus technique mais s'applique à un milieu diffus quelconque.

1.8.2 Dénombrement dans l'espace réciproque

S'il y a équipartition de modes, alors on comprend bien que le rapport de l'énergie potentielle de cisaillement à l'énergie potentielle de compression revient simplement à compter, pour une fréquence donnée, le nombre de modes de cisaillement et le nombre de modes de compression puis à en faire le rapport [15, 16, 18, 19]. Pour un cube de côté L arbitrairement large avec des conditions aux limites périodiques, les composantes du vecteur \mathbf{k} sont quantifiées, $k_i^{s,p} = 2\pi n_i v_{s,p}/L$ avec n_i entier. Chaque mode occupe donc un volume $(2\pi v_{s,p}/L)^3$. Le nombre d'états de compression qui ont une pulsation comprise entre ω et $\omega + d\omega$ est donné par le volume entre les sphères de rayon $\omega + d\omega$ et ω divisé par le volume qu'occupe un mode [15], soit :

$$dN_p(\omega) = \frac{L^3 \omega^2}{2\pi^2 v_p^3} d\omega.$$

La densité des états des modes P est donc $\mathcal{N}_p(\omega) = \omega^2 L^3 / 2\pi^2 v_p^3$ alors que la densité des états des modes S est $\mathcal{N}_s(\omega) = \omega^2 L^3 / \pi^2 v_s^3$. Le facteur 2 est dû aux deux états de polarisation des modes S . Par conséquent le rapport de l'énergie potentielle de cisaillement à l'énergie potentielle de compression est donné par [15, 16, 18, 19]

$$\frac{\langle E_s \rangle}{\langle E_p \rangle} = \frac{2v_p^3}{v_s^3} \approx 10,4 \quad \text{dans la croûte.} \quad (1.17)$$

Par ailleurs, grâce au théorème du Viriel, l'énergie de chaque mode se divise équiprobablement entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, le rapport de l'énergie cinétique

sur l'énergie potentielle est donc

$$\frac{\langle E_c \rangle}{\langle E_p \rangle + \langle E_s \rangle} = 1. \quad (1.18)$$

1.8.3 Méthode générale

De façon générale, pour un déplacement \mathbf{u} de pulsation ω , les densités d'énergies cinétique, potentielle de cisaillement et potentielle de compression sont définies par les relations [39, 40, 41],

$$E_c \equiv \frac{1}{2}\rho\omega^2|\mathbf{u}|^2, \quad (1.19)$$

$$E_s \equiv \frac{1}{2}\rho v_s^2|\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2, \quad (1.20)$$

$$E_p \equiv \frac{1}{2}\rho v_p^2|\mathbf{div} \mathbf{u}|^2, \quad (1.21)$$

où ρ est la densité du milieu. L'équipartition implique que le champ de déplacement soit formé équiprobablement de tous les modes propres \mathbf{u}_n de pulsation ω du système soit,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\text{modes } n} c_n \mathbf{u}_n e^{-i\omega t}, \quad (1.22)$$

avec les variables aléatoires c_n vérifiant $\langle c_n \rangle = 0$ et $\langle c_n c_m^* \rangle = \eta(\omega, t) \delta_{n,m}$ où le symbole $\langle \dots \rangle$ marque la moyenne sur les réalisations du désordre [41]. Puisque les modes \mathbf{u}_n sont normés et orthogonaux par rapport au produit scalaire (1.16), il est relativement facile de montrer que pour un déplacement donné par (1.22) les moyennes sur les réalisations du désordre des densités d'énergies, pour une pulsation ω , sont [41],

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho\omega^2 \sum_{\text{modes } n} |\mathbf{u}_n|^2 \delta(\omega - \omega_n), \\ \langle E_s \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_s^2 \sum_{\text{modes } n} |\mathbf{rot} \mathbf{u}_n|^2 \delta(\omega - \omega_n), \\ \langle E_p \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_p^2 \sum_{\text{modes } n} |\mathbf{div} \mathbf{u}_n|^2 \delta(\omega - \omega_n), \end{aligned}$$

La somme sur l'indice n représente aussi bien la somme sur les deux types d'ondes S et P que la somme sur les directions de propagation \mathbf{k} .

La divergence des modes de vibration S et le rotationnel des modes de vibration P étant nuls, le calcul des densités d'énergie revient à évaluer,

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho\omega^2 \sum_{n=P,S} |\mathbf{u}_n|^2 \delta(\omega - \omega_n),$$

$$\begin{aligned}\langle E_s \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_s^2 \sum_{\text{modes S}} |\mathbf{rot} \mathbf{u}_s|^2 \delta(\omega - \omega_s), \\ \langle E_p \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_p^2 \sum_{\text{modes P}} |\mathbf{div} \mathbf{u}_p|^2 \delta(\omega - \omega_p),\end{aligned}$$

Dans un premier temps, calculons l'énergie potentielle de compression. La somme sur les modes P correspond à une intégration sur les directions de propagation \mathbf{k} ,

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_p^2 \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{div} \mathbf{u}_p|^2 \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega_p).$$

Il est facile de monter, à partir de la relation (1.14), que $|\mathbf{div} \mathbf{u}_p|^2 = k_p^4/v_p^5$. De plus comme $|\mathbf{k}| = \omega$, il vient $\delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega_p) = \delta(k - k_p)$ et donc,

$$\begin{aligned}\langle E_p \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho v_p^2 \int d^3\mathbf{k} \frac{k_p^4}{v_p^5} \delta(k - k_p), \\ &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho \omega^4 \left(\frac{4\pi}{v_p^3} \right).\end{aligned}$$

Le même raisonnement, en n'oubliant pas que les modes S ont deux états de polarisation, permet d'arriver aux résultats suivants pour $\langle E_c \rangle$ et $\langle E_s \rangle$,

$$\begin{aligned}\langle E_s \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho \omega^4 \left(\frac{8\pi}{v_s^3} \right), \\ \langle E_c \rangle &= \frac{1}{2}\eta(\omega, t)\rho \omega^4 \left(\frac{4\pi}{v_p^3} + \frac{8\pi}{v_s^3} \right).\end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus en (1.17) et (1.18) par un décompte des états dans l'espace réciproque,

$$\begin{aligned}\frac{\langle E_s \rangle}{\langle E_p \rangle} &= \frac{2v_p^3}{v_s^3} \approx 10,4 \quad \text{dans la croûte,} \\ \frac{\langle E_c \rangle}{\langle E_p \rangle + \langle E_s \rangle} &= 1.\end{aligned}$$

Cette méthode est beaucoup plus lourde et cache un peu les phénomènes physiques mis en jeu mais elle est beaucoup plus générale et s'applique même si les modes propres ne sont pas purement S ou purement P .

Ce qu'il faut retenir de cette section est que l'équipartition des modes de vibration implique que les rapports d'énergies sont constants dans le temps et indépendants de la source. La valeur des rapports d'énergies varie d'un système à un autre puisque les modes dépendent de la géométrie.

1.9 Plan de la deuxième partie

Une description très complète de la propagation des ondes sismiques dans un milieu hétérogène est donnée par l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques qui a été établie par Weaver en 1990 [16] et en 1996 par Ryzhik *et al* [17]. Cette équation décrit la propagation de l'intensité spécifique des ondes élastiques (par le biais d'un vecteur de Stokes) dans un milieu aléatoire et est valable si $\lambda_{s,p} \ll l_{s,p}^*$. A la différence de l'équation de transfert radiatif classique, l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques tient compte des deux modes S et P ainsi que des conversions de modes lors des diffusions. Dans cette formulation, il n'y a pas d'interférence entre les différentes ondes et les modes de Rayleigh ne sont pas pris en compte. Cette équation a été largement étudiée par des simulations numériques et a permis de comprendre de nombreux aspects de la propagation des ondes élastiques dans les milieux désordonnés [4, 14, 42, 43, 44, 45]. Il a été montré que l'équation de transfert radiatif se simplifie en une équation de diffusion pour l'énergie totale lorsque les temps de propagation sont longs devant le temps libre parcours moyen [16, 17, 18, 19]. Mais malheureusement cette équation de diffusion décrit l'évolution de l'énergie totale ($E_{tot} = E_s + E_p$ voir la section 1.7) et ne permet pas de suivre l'évolution temporelle de E_s et E_p séparément et ainsi d'étudier la valeur d'équipartition E_s/E_p .

Au **chapitre 2** nous étudierons le régime où le libre parcours moyen de transport est plus petit que l'épaisseur de la croûte terrestre, $\lambda_{s,p} \ll l_{s,p}^* < H$. Nous présenterons une approximation de diffusion généralisée de l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques. Cette approche nous permettra de décrire l'évolution spatio-temporelle des énergies E_s et E_p séparément, et de quantifier le temps nécessaire pour entrer dans le régime de l'équipartition ainsi, que l'influence des conditions aux limites sur la valeur du rapport E_s/E_p . La faiblesse de cette approche vient de ce que les ondes de Rayleigh ne sont pas prises en compte (comme elles ne l'étaient pas dans l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques). Néanmoins cette équation de diffusion généralisée a le grand mérite d'être relativement simple et de mettre en valeur les mécanismes clés de la diffusion multiple des ondes élastiques.

Le **chapitre 3** est, à l'opposé du chapitre 2, dédié à l'étude de la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre dans le régime où $l_{s,p}^* > H$. Cette situation est très certainement courante pour la terre et pose la question de la validité de l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques dans sa forme courante. Le désordre étant faible dans la croûte, la "bonne" base pour décrire la coda n'est plus celle des ondes planes S et P , qui décrit bien les ondes directes, mais plutôt la base des modes propres de

la croûte. Dans cette nouvelle base, il est possible de dériver une équation du transfert radiatif pour laquelle les hétérogénéités du milieu couplent les modes entre eux. Cette nouvelle équation est très puissante car elle prend en compte, par construction, les effets d'interférences aux interfaces et décrit par conséquent parfaitement les ondes de Rayleigh ainsi que les mesures en champ proche. L'étude du temps d'équipartition ainsi que celle des valeurs d'équipartition seront réalisées par le biais d'une approximation de diffusion de cette nouvelle équation du transfert radiatif. De plus nous nous intéresserons à la théorie du cône de rétrodiffusion cohérente, en présence d'une surface libre, sera présentée pour différentes symétries source-détecteur.

Le **chapitre 4** est le résultat d'une collaboration active entre Nicolas Shapiro (alors professeur à l'université nationale autonome de Mexico et qui est maintenant en poste à l'université du Colorado à Boulder aux USA), Renaud Hennino, Ludovic Margerin, Michel Campillo du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique de Grenoble, de Richard Weaver de l'université de Illinois à Urbana-Champaign et de Bart van Tiggelen et moi-même du Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés de Grenoble. La partie expérimentale est due à Nicolas Shapiro, Ludovic Margerin et Michel Campillo alors que les analyses des données sont de Renaud Hennino et Nicolas Shapiro. Le cadre théorique a été mis en place par Richard Weaver, Bart van Tiggelen et moi-même. J'ai particulièrement développé les calculs analytiques (basés sur le modèle décrit au chapitre 3) qui permettent d'obtenir des prédictions théoriques directement comparable aux résultats expérimentaux. Ce chapitre présente la comparaison entre des mesures réalisées au Mexique en 1998 et les prédictions théoriques des valeurs d'équipartition à la surface libre. Différents rapports d'énergies ont été mesurés dans la coda de douze tremblements de terre locaux de magnitude supérieure à quatre sur l'échelle de Richter. Leur analyse montre très clairement une stabilisation temporelle des différents rapports énergétiques, ce qui indique que la coda est formée d'ondes multiples diffusées. La comparaison avec les valeurs théoriques montre que les ondes volumiques aussi bien que les ondes de Rayleigh sont équipartitionnées dans la coda.

Pour terminer, dans le **chapitre 5**, nous présenterons un bilan de cette deuxième partie ainsi que des perspectives.

Bibliographie

- [1] K. Aki. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geoph. Res.*, 74:615, 1969.
- [2] K. Aki et B. Chouet. Origin of coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *J. Geoph. Res.*, 80:3322, 1975.
- [3] H. Sato et M. Fehler. *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*. Springer Verlag New York, INC, 1998.
- [4] L. Margerin. *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1998.
- [5] J.P. Fouque, editor. *Diffuse Waves in Complex Media*. Kluwer Dordrecht, 1999.
- [6] Research group POAN. *New Aspects of Electromagnetic and Acoustic Wave Diffusion*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
- [7] A. Dziewonski et D. Anderson. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25:297, 1981.
- [8] K. Aki et P. Richards. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Freeman, San Francisco, 1975.
- [9] A. Ben-Menahem et S. Singh. *Seismic waves and sources*. Springer-Verlag New York, 1981.
- [10] T. Lay et T. Wallace. *Modern Global Seismology*. Academic Press, San Diego, 1995.
- [11] R. Wu et K. Aki. Scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity. *Geophysics*, 50:582, 1985.

- [12] R. Wu et K. Aki. Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 90:10261, 1985.
- [13] K. Aki. Scattering conversion P to S versus S to P . *Bull. Seism. Soc. Am.*, page 1969, 1992.
- [14] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves. *Geoph. Res.*, 105(B4):7873, 2000.
- [15] R. L. Weaver. On diffuse waves in solid media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71:1608, 1982.
- [16] R. L. Weaver. Diffusivity of ultrasound in polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.*, 38:55, 1990.
- [17] L. Ryzhik G. Papanicolaou et J. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, 24:327, 1996.
- [18] G. Papanicolaou L. Ryzhik et L. Keller. Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, page 1107, 1996.
- [19] G. Papanicolaou L. Ryzhik et J. Keller. Erratum to: Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 86, 1996.
- [20] R. Snieder. Imaging and averaging in complex media. *dans [5]*, page 405, 1999.
- [21] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q . *Geophys. J. Int.*, 134:596, 1998.
- [22] L. Margerin M. Campillo N. Shapiro et B. van Tiggelen. Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in Mexico. *Geophys. J. Int.*, 138:343, 1999.
- [23] S. Singh et R. Herrmann. Regionalization of crustal coda Q in the continental United States. *J. Geo. Res.*, 88:527, 1983.
- [24] C. Lacombe M. Campillo et A. Paul. Separation of intrinsic absorption and scattering attenuation from L_g coda decay in central France using acoustic radiative transfer theory. *en prèparation*, 2001.
- [25] J. Turner. Scattering and diffusion of seismic waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88:276, 1998.

- [26] J. Turner. *Radiative Transfer of Ultrasound*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- [27] J. Spetzler et R. Snieder. The effect of small-scale heterogeneity on the arrival time of waves. *Geophys. J. Int.*, 145:786, 2001.
- [28] C. Ying et R. Truell. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid. *J. Appl. Phys.*, 27:1086, 1956.
- [29] N. Einspruch E. Witterholt et R. Truell. Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium. *J. Appl. Phys.*, 31:806, 1960.
- [30] V. Korneev et L. Johnson. Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion. *Pure Appl. Geophys.*, 147:675, 1996.
- [31] R. Wu. Multiple scattering and energy transfer of seismic waves-separation of seismic effect from intrinsic attenuation: Theoretical modeling. *Geoph. J. R. Astro. Soc.*, 82:57, 1985.
- [32] I. Abubikarov et A. Gusev. Estimation of scattering properties of lithosphere of kamchatka based on Monte-Carlo simulation of record envelope of near earthquake. *Physics of the earth and Planetary Interiors*, 64:52, 1990.
- [33] M. Hoshiaba. Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law. *Physics of the earth and Planetary Interiors*, 67:123, 1991.
- [34] M. Campillo et J. L. Plantet. Frequency dependence and spacial distribution of seismic attenuation in France: experimental results and possible interpretations. *Physics of the earth and Planetary Interiors*, 67:48, 1991.
- [35] M. Toksoz et D. Johnston, editor. *Attenuation: A state of the art summary*. Society of Geophysicists, Tulsa, 1981.
- [36] M. Hoshiaba A. Rietbrock F. Scherbaum H. Nakahara et C. Haberland. Scattering attenuation and intrinsic absorption using uniform and depth dependent model: Application to full seismogram envelope recorded in Norther Chile. *Journal of Seismology*, 5:157, 2001.
- [37] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover New York, 1960.
- [38] H.C. van de Hulst. *Multiple Light Scattering*. Academic, New York, 1980.

- [39] P. Morse et H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [40] N. Shapiro M. Campillo L. Margerin S. Singh V. Kostoglodov et J. Pacheteco. The energy partitioning between P and S waves and the diffusive character of the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90:655, 2000.
- [41] R. L. Weaver. Diffuse elastic waves at a free surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78:131, 1985.
- [42] J. Turner et R. L. Weaver. Radiative transfer of ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3654, 1994.
- [43] J. Turner et R. L. Weaver. Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3675, 1994.
- [44] J. Turner et R. L. Weaver. Time dependence of multiply scattered diffuse ultrasound in polycrystalline media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97:2639, 1995.
- [45] J. Turner et R. L. Weaver. Ultrasonic radiative transfer in polycrystalline media: Effects of a fluid-solid interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98:2801, 1995.

Chapitre 2

Equation de diffusion vectorielle pour des ondes élastiques diffuses

Generalized diffusion equation for multiply scattered elastic waves

Nicolas Trégourès et Bart van Tiggelen

Article accepté à *Waves in Random media*, 2001.

Abstract We study multiple scattering of elastic waves using a generalized diffusion approximation of the radiative transfer equation applied to spherically symmetric scatterers. This generalized diffusion equation allows us to keep track of the two elastic wave-types as well as of mode conversions. It describes the process towards equipartition and fills, as such, a gap between the radiative transfer equation and the conventional diffusion approximation. The effects of boundary conditions and dissipation on the energy partitioning are studied.

2.1 Introduction

Over the past 10 years, multiple scattering of elastic waves in complex media has seen an enormous development, both in the modeling of high-frequency seismic-wave propagation [1] as well as in the ultrasonic characterization and the non-destructive testing of polycrystalline metals [2, 3]. This has led to the fundamental concept of equipartition of energy [3, 4, 5, 6, 7, 8], which states that, after a time comparable to the transport mean free time, the ratio of shear to compressional energy converges to a universal number, independent of the fluctuations that cause the scattering. In general, the propagation and scattering of elastic waves in a random medium can be described by a radiative transfer equation [3, 5], which includes mode conversions between compressional and shear waves and the degree of correlation between the two transverse components. This equation has recently been used in ultrasonic characterization and in seismology to investigate how equipartition sets in in the diffusive regime [9, 10, 11, 12, 13].

It is well-known that the complexity of the radiative transfer equation can be greatly reduced by the use of the diffusion approximation [3, 5]. This diffusion approximation is valid after the waves have scattered many times. It allows to deduce a number of important results in seismology [14, 15]. Unfortunately, its conventional form disregards the separation of the energy into two elastic wave-types: it can only describe the space and time evolution of the total energy density, but is unable to predict how the energy will be distributed among compressional and shear modes. In addition, mode conversions at the boundaries are not treated by the conventional diffusion approximation. As a consequence, the time evolution towards complete equipartitioning and the role of boundary effects cannot be studied.

In this paper, we first (section 2.2) develop a generalized diffusion approximation of the radiative transfer equation applied to spherically symmetric scatterers. The diffusion approximation applies when the propagation path is much larger than the characteristic distance between two scattering events. Moreover the wavelength has to be much shorter than the mean free path to prevent interference effects. The diffusion approximation is therefore meaningful in the multiply scattered regime. Our generalized diffusion approximation will keep track of the two elastic wave-types as well as mode conversions, without losing the simplicity of the diffusion equation. It bridges a gap between the elastic radiative transfer equation and the conventional diffusion equation. Then, in section 2.3, using a flux conservation argument, we will find the associated boundary conditions. Sections 2.4 is devoted to the study of the unbounded medium and the role of absorption on the

equipartition of energy. Section 2.5 deals with the half-space with a free-surface whereas the results of the slab geometry bounded by a free-surface and a solid-solid interface are presented in section 2.6. In section 2.7 we will give our conclusions.

2.2 Diffusion approximation for elastic polarization.

For the sake of completeness, we include here the salient points of the radiative transfer equation for elastic waves. As in optics, one can represent polarized elastic waves by means of the Stokes formalism [16, 17]. Let us consider a wave propagating in the positive \mathbf{z} direction at a frequency ω . The most general harmonic elastic displacement can be written as

$$u_x = A_x e^{i(\omega t - k_s z)} e^{i\phi_x}, \quad (2.1)$$

$$u_y = A_y e^{i(\omega t - k_s z)} e^{i\phi_y}, \quad (2.2)$$

$$u_z = A_z e^{i(\omega t - k_p z)} e^{i\phi_z}, \quad (2.3)$$

where A_x , A_y and A_z are the displacement amplitudes, k_p and k_s the compressional and shear wave numbers and ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z the phase shifts of each components. The elastic Stokes vector, containing five components, of a pure plane wave, denoted by the index α , is defined by [3, 5, 9, 14]

$$\underline{L}_\alpha \equiv \begin{pmatrix} I_1^\alpha \\ I_2^\alpha \\ I_3^\alpha \\ I_4^\alpha \\ I_5^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p^\alpha \\ I_s^\alpha \\ Q^\alpha \\ U^\alpha \\ V^\alpha \end{pmatrix} = \frac{\rho\omega^2}{2} \begin{pmatrix} v_p A_z^2 \\ v_s (A_x^2 + A_y^2) \\ v_s (A_x^2 - A_y^2) \\ 2v_s A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y) \\ 2v_s A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

where ρ is the mass density of the medium and v_p and v_s are the compressional and shear wave velocities. The compressional and shear wave velocities are related to the Lamé coefficients and the mass density by the relations $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ and $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. The first two parameters of the Stokes vector (2.4) represent the intensity of respectively the compression and the shear component of the displacement. The last three parameters have the same dimension but their interpretation is less obvious: Q^α , U^α and V^α measure the cross-correlations between the two components of the shear displacement [16].

A general elastic displacement is the sum of many plane waves. In conventional transport theory, the Stokes vector $\underline{L}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ of such a complex displacement is the incoherent

sum of each individual Stokes vectors \underline{I}_α associated to each independent plane wave in the $\hat{\mathbf{s}}$ direction

$$\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{\alpha} \underline{I}_\alpha. \quad (2.5)$$

As a result, interferences between all waves have been neglected. The shear component of the displacement is, by definition, unpolarized when $Q = U = V = 0$. It corresponds to a Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ made of a sum of independent waves whose shear displacement vectors are uniformly distributed in the plan perpendicular to the $\hat{\mathbf{s}}$ direction. Nevertheless, one has to bear in mind that, even for an unpolarized shear displacement, the intensity can still be distributed arbitrarily among *two wave-types: compressional I_p and shear I_s* .

A radiative transfer equation for elastic waves has been recently derived from first principles by Weaver [3] and Ryzhik *et al* [5]. This transport equation describes the space-time evolution of the Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ with the limitation that the heterogeneities in the medium should not be too strong to induce interference (weak localizations) effects. In a matrix notation it reads [3, 5],

$$\partial_t \underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \underline{\underline{V}} \cdot [\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla_r \underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})] + \underline{\underline{\tau}}^{-1} \cdot \underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \cdot \underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}') d^2 \hat{\mathbf{s}}', \quad (2.6)$$

where $\underline{\underline{\tau}}$ and $\underline{\underline{V}}$ denote respectively the mean free time and the wave velocity matrix,

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} v_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_s \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\tau_p = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} [P_{11}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') + P_{21}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')] d^2 \hat{\mathbf{s}}', \quad (2.8)$$

$$\tau_s = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} [P_{12}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') + P_{22}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')] d^2 \hat{\mathbf{s}}'. \quad (2.9)$$

The first two terms on the left-hand side of equation (2.6) govern the free evolution of the Stokes vector. The term involving the mean free time matrix $\underline{\underline{\tau}}$ represents the extinction due to scattering from the direction $\hat{\mathbf{s}}$ to all other directions. The Mueller matrix $\underline{\underline{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ occurring on the right-hand side of equation (2.6) governs the scattering of the Stokes vector from directions $\hat{\mathbf{s}}'$ to the direction $\hat{\mathbf{s}}$. It is a gain term for the Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$. For a medium containing discrete scatterers, the Mueller matrix is related to the density of scatterers η and the single particle differential cross-sections. We refer to Turner *et al* [9] and Margerin *et al* [13] for a detailed account on the Mueller matrix.

2.2.1 Derivation of the generalized diffusion equation.

It is our intention to derive a generalized diffusion approximation of the radiative transfer equation (2.6) that takes into account the two elastic wave-types S and P but that disregards any cross-correlations between the two shear components described by the three variables Q , U and V . As a matter of fact, in a multiply scattering medium, the decorrelation of the two shear component is known to occur on a length scale of a transport mean free path [18]. This will allow us to keep track of the time evolution of the energy among compressional mode P and shear mode S within the relative simplicity of a diffusion equation. We stress that this energy partitioning cannot be studied using the conventional diffusion approximation of the radiative transfer equation [3, 5] which describes the space-time evolution of the *total* energy density.

As a starting point, let us rewrite equation (2.6) for any component $i \in [1, 5]$ of the Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$,

$$\partial_t I_i(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + v_i \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla_r I_i(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{I_i(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}{\tau_i} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{j=5} \int_{4\pi} v_j P_{ij}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_j(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}') d^2 \hat{\mathbf{s}}'. \quad (2.10)$$

The local energy densities $E_{p,s}(\mathbf{r}, t)$ and the local current density are related to the specific intensity $I_{p,s}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ by the relations,

$$E_{p,s}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} I_{p,s}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) / v_{p,s} d^2 \hat{\mathbf{s}}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{J}_{p,s}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}} I_{p,s}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) d^2 \hat{\mathbf{s}}. \quad (2.12)$$

For a medium filled with spherical symmetric scatterers we find that, upon taking the first two moments of equation (2.10), the first two Stokes parameters I_p and I_s decouple from the last three Q , U and V as was also noticed by Turner *et al* [9]. As a consequence, the first two moments of equation (2.10) simplify to

$$\partial_t E_m(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{E_m(\mathbf{r}, t)}{\tau_m} = \quad (2.13)$$

$$\sum_{n=p,s} \iint_{4\pi} \frac{P_{mn}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')}{4\pi} I_n(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}') d^2 \hat{\mathbf{s}} d^2 \hat{\mathbf{s}}',$$

$$\partial_t \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + v_m \int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}} [\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla I_m(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})] d^2 \hat{\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)}{\tau_m} = \quad (2.14)$$

$$\sum_{n=p,s} \iint_{4\pi} \frac{v_n P_{mn}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \hat{\mathbf{s}}}{4\pi} I_n(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}') d^2 \hat{\mathbf{s}} d^2 \hat{\mathbf{s}}'.$$

Here the index m runs only from 1, associated to the compression mode P , to 2, associated to the shear mode S , and not from 1 to 5 as in equation (2.10). The reduced 2×2 Mueller

matrix $\underline{\underline{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ is

$$\underline{\underline{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \eta \begin{pmatrix} \frac{d\sigma}{d\Omega}(p\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow p\hat{\mathbf{s}}) & \frac{d\sigma}{d\Omega}(s\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow p\hat{\mathbf{s}}) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow s\hat{\mathbf{s}}) & \frac{d\sigma}{d\Omega}(s\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow s\hat{\mathbf{s}}) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

where η is the density of scatterers in the medium. We point out that, for spherically symmetric scatterers, the scattering differential cross-section from a mode n in the direction $\hat{\mathbf{s}}'$ to a mode m in the direction $\hat{\mathbf{s}}$, $d\sigma/d\Omega(n\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow m\hat{\mathbf{s}})$, depends only on the scalar product $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$. As a consequence, the Mueller matrix given by the relation (2.15) is a function of the scalar product $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$ only.

In the diffusion approximation, the specific intensity $I_{p,s}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ is assumed to be of the form [17],

$$I_{p,s}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{4\pi} [v_{p,s}E_{p,s}(\mathbf{r}, t) + 3\mathbf{J}_{s,p}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{s}}]. \quad (2.16)$$

After many scattering events, the dipolar correction term to perfect isotropy, $\mathbf{J}_{s,p}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{s}}$, is much smaller than the isotropic term $v_{s,p}E_{s,p}(\mathbf{r}, t)$. Recalling the following integrals valid for any vector \mathbf{B} ,

$$\int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B})d^2\hat{\mathbf{s}} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{B}, \quad (2.17)$$

$$\int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}}[\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}})]d^2\hat{\mathbf{s}} = 0, \quad (2.18)$$

and inserting (2.16) into equations (2.13) and (2.15), it follows

$$\partial_t E_m(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{E_m(\mathbf{r}, t)}{\tau_m} = \sum_{n=p,s} \left[\iint_{4\pi} \frac{P_{mn}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')}{(4\pi)^2} d^2\hat{\mathbf{s}}d^2\hat{\mathbf{s}}' \right] v_n E_n(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

$$\partial_t \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{v_m^2}{3} \nabla E_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)}{\tau_m} = \sum_{n=p,s} \iint_{4\pi} \frac{3v_m P_{mn}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')}{(4\pi)^2} \hat{\mathbf{s}} [\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{s}}'] d^2\hat{\mathbf{s}}d^2\hat{\mathbf{s}}'. \quad (2.20)$$

Since the Mueller matrix only depends on $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$ the right-hand side term of equation (2.20) becomes

$$\sum_{n=p,s} \left[\iint_{4\pi} v_m(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \frac{P_{mn}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')}{(4\pi)^2} d^2\hat{\mathbf{s}}d^2\hat{\mathbf{s}}' \right] \mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t). \quad (2.21)$$

Expressing the mean free time τ_m and the reduced Mueller matrix in terms of the differential cross-section $d\sigma/d\Omega(n\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow m\hat{\mathbf{s}})$, equations (2.19) and (2.20) can easily be written

in the following form:

$$\partial_t E_m(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=p,s} J_{mn} E_n(\mathbf{r}, t), \quad (2.22)$$

$$\partial_t \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{v_m^2}{3} \nabla E_m(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=p,s} [\underline{T}^{-1}]_{mn} \mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t) \quad (2.23)$$

where we have introduced the collision matrix \underline{J} which has the dimension of an inverse of time

$$\underline{J} = \frac{\eta}{v_p^2} \sigma_{ps} \begin{pmatrix} v_p^3 & -\frac{1}{2}v_s^3 \\ -v_p^3 & \frac{1}{2}v_s^3 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

and the “transport mean free time” matrix \underline{T} defined by

$$(\underline{T}^{-1})_{mn} = \frac{\delta_{mn}}{\tau_m} - \eta v_m \int_{4\pi} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \frac{d\sigma}{d\Omega} (n\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow m\hat{\mathbf{s}}) d^2\hat{\mathbf{s}}. \quad (2.25)$$

Note that we have used a reciprocity relation for the total cross-section $\sigma_{sp}/\sigma_{ps} = 2v_p^2/v_s^2$ [6, 7, 13, 19] in the expression (2.24) of the collision matrix \underline{J} .

If we ignore the term $\partial_t \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)$ in the equation (2.23), we find a generalized Fick law

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) = - \sum_n D_{mn} \nabla E_n(\mathbf{r}, t), \quad (2.26)$$

where the diffusion matrix is $\underline{D} \equiv \frac{1}{3} \underline{T} \cdot \underline{V}^2$ and where the diagonal velocity matrix \underline{V} is defined by

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} v_p & 0 \\ 0 & v_s \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Upon substituting $\nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)$ from equation (2.22) into the divergence of equation (2.26) gives the following generalized diffusion equation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} E_p(\mathbf{r}, t) \\ E_s(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} - \underline{D} \cdot \Delta \begin{pmatrix} E_p(\mathbf{r}, t) \\ E_s(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = - \underline{J} \cdot \begin{pmatrix} E_p(\mathbf{r}, t) \\ E_s(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

The collision matrix \underline{J} represents mode conversions due to scattering in the medium and is not a loss term for the energy $E_n(\mathbf{r}, t)$. This matrix has the eigenvalues 0 and $1/\tau_{eq}^0 = \eta \sigma_{ps} (v_p^3 + \frac{1}{2}v_s^3)/v_p^2$. The eigenvalue 0 expresses energy conservation. We stress that \underline{D} and \underline{J} do not commute and thus cannot be simultaneously diagonalized. Hence, it is impossible to decouple equation (2.28) into two independent scalar diffusion equations for E_p and E_s .

It is straightforward to evaluate the diffusion matrix \underline{D} in terms of the scattering cross-sections. Indeed, if we define σ_{nm}^* by

$$\sigma_{nm}^* = \int_{4\pi} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \frac{d\sigma}{d\Omega} (n\hat{\mathbf{s}}' \rightarrow m\hat{\mathbf{s}}) d^2\hat{\mathbf{s}}. \quad (2.29)$$

which is a positive, zero or negative for, respectively, forward, isotropic or backward scattering, the inverse of the transport mean free time matrix, $\underline{\underline{T}}^{-1}$, takes the form

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \eta \begin{pmatrix} v_p(\sigma_{pp} + \sigma_{ps} - \sigma_{pp}^*) & -v_p\sigma_{sp}^* \\ -v_s\sigma_{ps}^* & v_s(\sigma_{ss} + \sigma_{sp} - \sigma_{ss}^*) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

As a consequence

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{v_p v_s N} \begin{pmatrix} v_s(\sigma_{ss} + \sigma_{sp} - \sigma_{ss}^*) & v_p\sigma_{sp}^* \\ v_s\sigma_{ps}^* & v_p(\sigma_{pp} + \sigma_{ps} - \sigma_{pp}^*) \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

with

$$N = \eta \left[(\sigma_{ss} + \sigma_{sp} - \sigma_{ss}^*)(\sigma_{pp} + \sigma_{ps} - \sigma_{pp}^*) - \sigma_{sp}^* \sigma_{ps}^* \right]. \quad (2.32)$$

It is now easy to find the explicit expression of the diffusion matrix $\underline{\underline{D}}$:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3N} \begin{pmatrix} v_p(\sigma_{ss} + \sigma_{sp} - \sigma_{ss}^*) & v_s\sigma_{sp}^* \\ v_p\sigma_{ps}^* & v_s(\sigma_{pp} + \sigma_{ps} - \sigma_{pp}^*) \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

2.2.2 Conventional diffusion equation.

From our formalism it is not very difficult to show that, in the equipartition regime, the generalized diffusion equation (2.28) further simplifies to the conventional diffusion equation for the *total* energy density, $E_{tot}(\mathbf{r}, t) = E_p(\mathbf{r}, t) + E_s(\mathbf{r}, t)$ [3, 5]. Indeed, in the basis where the collision matrix $\underline{\underline{J}}$ is diagonal (denoted by a tilde), equation (2.28) becomes

$$\partial_t \underline{\underline{\tilde{E}}}(\mathbf{r}, t) - \underline{\underline{\tilde{D}}} \cdot \Delta \underline{\underline{\tilde{E}}}(\mathbf{r}, t) = -\underline{\underline{\tilde{J}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{E}}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.34)$$

where the vector $\underline{\underline{\tilde{E}}}(\mathbf{r}, t)$ and the matrix $\underline{\underline{\tilde{J}}}$ are,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{E}_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + 2v_p^3/v_s^3)} \begin{pmatrix} E_p(\mathbf{r}, t) + E_s(\mathbf{r}, t) \\ \frac{2v_p^3}{v_s^3} E_p(\mathbf{r}, t) - E_s(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\underline{\underline{\tilde{J}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_{eq}^0} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Developing the matrix diffusion equation (2.34) yields:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{E}_1(\mathbf{r}, t) - \tilde{D}_{11} \Delta \tilde{E}_1(\mathbf{r}, t) - \tilde{D}_{12} \Delta \tilde{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \partial_t \tilde{E}_2(\mathbf{r}, t) - \tilde{D}_{21} \Delta \tilde{E}_1(\mathbf{r}, t) - \tilde{D}_{22} \Delta \tilde{E}_2(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{E}_2(\mathbf{r}, t)}{\tau_{eq}^0} \end{cases} \quad (2.37)$$

As the equipartition regime sets in $E_s/E_p \rightarrow 2v_p^3/v_s^3$ [4, 6], the component $\tilde{E}_2(\mathbf{r}, t)$ converges towards 0. Equation (2.37) now simplifies to a scalar diffusion equation for the total energy density $E_{tot}(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{cases} \partial_t E_{tot}(\mathbf{r}, t) - D_e \Delta E_{tot}(\mathbf{r}, t) = 0, \\ E_s(\mathbf{r}, t)/E_p(\mathbf{r}, t) = 2v_p^3/v_s^3, \end{cases} \quad (2.38)$$

where we have introduced the elastic diffusion constant D_e :

$$D_e = \tilde{D}_{11} = \frac{1}{1 + 2v_p^3/v_s^3}(D_{pp} + D_{sp}) + \frac{2v_p^3/v_s^3}{1 + 2v_p^3/v_s^3}(D_{ss} + D_{ps}). \quad (2.39)$$

The elastic diffusion constant D_e agrees with the result obtained by Weaver [3] and Ryzhik *et al* [5]. It is a weighted sum of the compressional and shear diffusion constants $D_p = D_{pp} + D_{sp}$ and $D_s = D_{ss} + D_{ps}$. The weighting factors are determined by the partitioning of the energy among the different modes. The elastic diffusion constant D_e is sometimes written in terms of transport mean free path, l_p^* and l_s^* , which are defined from the compressional and shear diffusion constants

$$D_p = \frac{1}{3}v_p l_p^*, \quad D_s = \frac{1}{3}v_s l_s^*. \quad (2.40)$$

For times smaller than the time to reach complete energy equipartition, neither the relation $E_s/E_p = 2v_p^3/v_s^3$ nor the conventional diffusion equation (2.38) for the total energy density are valid. As a result, one has to solve the 2×2 matrix diffusion equation (2.28). Moreover, the conventional diffusion equation (2.38) is unable to take into account mode conversions on the boundaries. Indeed mode conversions at the boundaries may affect locally the energy partition between compressional and shear modes. This effect cannot be incorporated by the conventional diffusion equation (2.38) since the energy ratio is set to $E_s/E_p = 2v_p^3/v_s^3$. Even for times after the energy has stabilized to its stationary value, one has to solve the generalized diffusion equation (2.28) in order to find the local effects of the boundaries on the energy partition between compressional and shear modes.

2.3 Finite media and boundary conditions.

For a finite or semi-infinite medium, the generalized diffusion equation (2.28) has to be supplied by boundary conditions. They are traditionally obtained from flux conservation arguments [17]. For clarity we will denote with a subscript $+$ the flux or specific intensity going in the positive z direction and with a subscript $-$ the flux or specific intensity

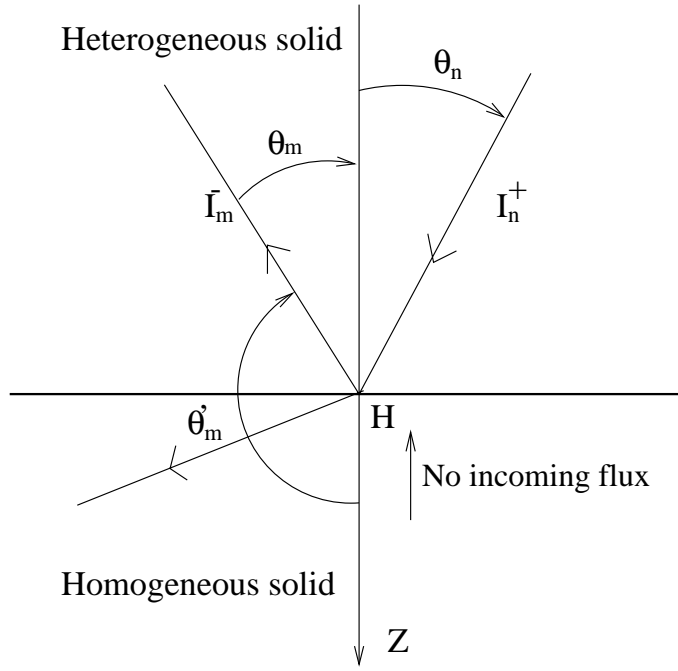


FIG. 2.1 - Conservation of the flux at the boundary. No incoming flux from $z > H$ in the negative z direction is assumed.

going in the negative z direction. If we assume a wave propagation in a heterogeneous medium in the half-space $z < H$ bounded by a homogeneous medium in the half-space $z > H$ free of sources, the flux coming from the homogeneous in the negative z direction must vanish (see figure 2.1). Consequently, for a mode m , either S or P , the flux at the boundary in the negative z direction, $F_{m,z=H}^-(t)$, is simply the reflected flux coming from the heterogeneous solid in the positive z direction:

$$\begin{aligned} F_{m,z=H}^-(t) &= - \int_0^{2\pi} d\phi'_m \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta'_m \sin \theta'_m \cos \theta'_m I_m^-(\theta'_m, \phi'_m, t) \\ &= - \int_0^{2\pi} d\phi'_m \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta'_m \sin \theta'_m \cos \theta'_m \sum_n R_{mn}(\theta_n \rightarrow \theta'_m) I_n^+(\theta_n(\theta'_m), \phi_n(\phi'_m), t), \end{aligned} \quad (2.41)$$

where $R_{mn}(\theta_n \rightarrow \theta'_m)$ is the reflection matrix for the specific intensity at the boundary for mode-conversion [10]. The reflection coefficients involving the shear mode S are given by an averaged sum over the two transverse polarizations, traditionally called SV and SH :

$$R_{ss}(\theta_s \rightarrow \theta_s) \equiv \frac{1}{2}R(SV, \theta_s \rightarrow SV, \theta_s) + \frac{1}{2}R(SH, \theta_s \rightarrow SH, \theta_s), \quad (2.42)$$

$$R_{ps}(\theta_s \rightarrow \theta_p) \equiv \frac{1}{2}R(SV, \theta_s \rightarrow P, \theta_p), \quad (2.43)$$

$$R_{sp}(\theta_p \rightarrow \theta_s) \equiv R(P, \theta_p \rightarrow SV, \theta_s). \quad (2.44)$$

According to the generalized Fick law (2.26), the local current density for a mode m , either S or P , is $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) = -\sum_n D_{mn} \nabla E_n(\mathbf{r}, t)$. The dipolar correction to perfect isotropy of the specific intensity is therefore $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{s}} = -\sum_n D_{mn} \partial_z E_n(\mathbf{r}, t) \cos(\theta_m)$. The specific intensity takes the following form,

$$I_m^\pm(\theta_m, \phi_m, t) = \frac{1}{4\pi} \left(v_m E_m(\mathbf{r}, t) \mp 3 \sum_n D_{mn} \frac{\partial E_n(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \cos \theta_m \right). \quad (2.45)$$

Substituting $I_m^\pm(\theta_m, \phi_m, t)$ into equation (2.41), and integrating over the angles θ'_m and ϕ'_m , the mathematical expression for flux conservation becomes:

$$\frac{1}{2} v_m E_m + \sum_n D_{mn} E'_l = \frac{1}{2} \sum_n R_{mn}^0 v_n E_n - \sum_{nl} R_{mn}^1 D_{nl} E'_l, \quad (2.46)$$

where we have abbreviated $\underline{E} = \underline{E}(\mathbf{r}, t)|_{z=0}$, $\underline{E}' = \partial_z \underline{E}(\mathbf{r}, t)|_{z=0}$ and have introduced the reflection matrices \underline{R}^0 and \underline{R}^1 defined by

$$R_{mn}^0 = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta_m \sin \theta_m \cos \theta_m R_{mn}(\theta_n \rightarrow \theta_m), \quad (2.47)$$

$$R_{mn}^1 = 3 \int_0^{\pi/2} d\theta_m \sin \theta_m \cos \theta_m R_{mn}(\theta_n \rightarrow \theta_m) \cos \theta_n. \quad (2.48)$$

The flux conservation equation (2.46) can be rewritten more compactly in the following matrix notation:

$$\underline{C} \cdot \underline{E} + \underline{D} \cdot \underline{E}' = \underline{0} \quad (2.49)$$

where the matrix \underline{C} , in terms of the reflection matrices, is:

$$\underline{C} = \frac{1}{2} (\underline{1} + \underline{R}^1)^{-1} \cdot (\underline{1} - \underline{R}^0) \cdot \underline{V}. \quad (2.50)$$

Equation (2.49) is the boundary condition for the energy density $\underline{E}(\mathbf{r}, t)$ of the generalized diffusion equation (2.28). It is a mixed boundary condition that can be interpreted as a generalized ‘‘Milne’’ boundary condition with an associated extrapolation length, now a 2×2 matrix, equal to $\underline{Z}_0 = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{D}$. It can easily be verified that, if mode conversions take place on the boundary, \underline{C} is a non-diagonal matrix.

2.3.1 Free surface.

The traction-free boundary condition is of special interest. One might think of the free surface boundary condition as a very simple boundary just imposing the absence of leakage. However, due to mode conversions it turns out to be more complex.

Because the free surface does not give rise to any outgoing flux, the normal current must be equal for any incident wave $I_m(\theta_m, \phi_m)$. Hence, the specific-intensity reflection coefficients must obey, for $m, n \in \{S, P\}$,

$$\sum_n d\theta_n \sin \theta_n \cos \theta_n R_{mn}(\theta_n \rightarrow \theta_m) = d\theta_m \sin \theta_m \cos \theta_m. \quad (2.51)$$

Equation (2.51) straightforwardly implies the following relation for the reflection matrices $\underline{\underline{R}}^0$ and $\underline{\underline{R}}^1$ defined in equations (2.47) and (2.48):

$$\forall m \quad \sum_n R_{nm}^{0,1} = 1. \quad (2.52)$$

On the other hand, the reciprocity relation for the reflection coefficient implies, for the reflection matrix $\underline{\underline{R}}^0$,

$$\frac{R_{sp}^0}{R_{ps}^0} = \frac{2v_p^2}{v_s^2}. \quad (2.53)$$

Equation (2.53) has a striking resemblance with the symmetry of the elastic scattering total cross-section, $\sigma_{sp}/\sigma_{ps} = 2v_p^2/v_s^2$ [6, 7, 13, 19]. One might look at $\underline{\underline{R}}^0$ as the “reflection cross-section matrix” of the boundary. Relations (2.52) and (2.53) impose the following form for the matrix $\underline{\underline{C}}$,

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{R}}^1)^{-1} \cdot (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^0) \cdot \underline{\underline{V}} \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - R_{sp}^1 & R_{ps}^1 \\ R_{sp}^1 & 2 - R_{ps}^1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2v_p^3/v_s^2 R_{ps}^0 & -v_s R_{ps}^0 \\ -2v_p^3/v_s^2 R_{ps}^0 & v_s R_{ps}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

which can be written in the form

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}, \quad \frac{a}{b} = -\frac{2v_p^3}{v_s^3}. \quad (2.56)$$

For a Poisson solid, which corresponds to a medium with equal Lamé coefficients $\lambda = \mu$, one can show that $a \approx 0.338 v_p$.

In section 2.5 we will see that (2.56) has a decisive impact on the local effects induced by the free-surface boundary on the energy partition between compressional and shear modes.

2.4 Time-dependent solution for the unbounded medium.

It is our intention to study the time evolution of the energy density $E_p(\mathbf{r}, t)$ and $E_s(\mathbf{r}, t)$ towards energy equipartition as well as the stationary energy ratio E_s/E_p itself. How-

ver, before solving the generalized diffusion equation (2.28) in the presence of boundary conditions, we first focus on the unbounded medium. Integrating equation (2.28) over \mathbf{r} gives the time evolution equation of the energy $\underline{E}(t) = \int d^3\mathbf{r} \underline{E}(\mathbf{r}, t)$,

$$\partial_t \begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix} = -\underline{J} \cdot \begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

In fact this equation follows directly from the radiative transfer equation without the need to apply the diffusion approximation [10, 20]. Information on the local spread of the energy density $\underline{E}(\mathbf{r}, t)$ has been lost, but we still have access to the global time dependence and therefore to the time required to reach global energy partition between compressional and shear modes. The solution of (2.57) is

$$\begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix} = e^{-\underline{J}t} \cdot \begin{pmatrix} E_p(t=0) \\ E_s(t=0) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

The collision matrix \underline{J} (see section 2.2.1) has eigenvalues 0 and $1/\tau_{eq}^0 = \eta\sigma_{ps}(v_p^3 + v_s^3/2)/v_p^2$ with eigenvectors, respectively

$$\underline{E}_0 = \begin{pmatrix} 1/v_p^3 \\ 2/v_s^3 \end{pmatrix}, \quad \underline{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Since $\exp(-\underline{J}t) \cdot \underline{E}_0 = \underline{E}_0$, $\exp(-\underline{J}t) \cdot \underline{E}_1 = \exp(-t/\tau_{eq}^0) \underline{E}_1$, and since $\underline{E}(t=0)$ can always be written as a linear combination of \underline{E}_0 and \underline{E}_1 , equation (2.58) takes the following form:

$$\begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix} = \chi \left[\begin{pmatrix} 1/v_p^3 \\ 2/v_s^3 \end{pmatrix} + \mu_0 \exp(-t/\tau_{eq}^0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad (2.60)$$

with χ a normalization factor and μ_0 dependent on the ratio E_s/E_p of the source.

The asymptotic solution of equation (2.60), $\underline{E}_{eq} = \underline{E}_0$, provides the well known equipartitioned energy ratio: $E_s/E_p = 2v_p^3/v_s^3$ of the unbounded medium [3, 6]. It is worth noticing that, although equipartition is a consequence of mode conversion due to multiple scattering in the medium, it has the remarkable property to be independent of both the scattering mechanism and the nature of the source.

The eigenvalue $1/\tau_{eq}^0$ and its eigenvector \underline{E}_1 describe the decay towards the steady-state solution. This implies that $\tau_{eq}^0 = v_p^2/(\eta\sigma_{ps}(v_p^3 + \frac{1}{2}v_s^3))$ is the time to reach global equipartition. The equipartition time τ_{eq}^0 is inversely proportional to the cross-section for mode conversion and is thus heavily dependent on nature of the disorder.

2.4.1 Role of dissipation.

Our formalism can easily be generalized to include dissipation. Equation (2.57) is modified to

$$\partial_t \begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix} = - \left[\underline{J} + \begin{pmatrix} 1/\tau_p^a & 0 \\ 0 & 1/\tau_s^a \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

At first sight, if $\tau_s^a \neq \tau_p^a$, one might think that equipartition of energy is destroyed in the presence of dissipation. If one assumes that the shear energy modes decay as $\exp(-t/\tau_s^a)$ and the compressional energy modes as $\exp(-t/\tau_p^a)$, the ratio E_s/E_p would be time-dependent and no energy equipartition will set in.

In order to determine the role of dissipation on the energy equipartition one has to find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$\underline{J} + \underline{A} = \frac{\eta}{v_p^2} \sigma_{ps} \begin{pmatrix} v_p^3 & -\frac{1}{2}v_s^3 \\ -v_p^3 & \frac{1}{2}v_s^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\tau_p^a & 0 \\ 0 & 1/\tau_s^a \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

First of all, in the case of strong dissipation, $\tau_{p,s}^a \ll \tau_{eq}^0$, the matrix \underline{J} acts as a perturbation of the eigenvalues $1/\tau_p^a$ and $1/\tau_s^a$ of the absorption matrix \underline{A} . The eigenvalues and eigenvectors are

$$\alpha_p = \frac{1}{\tau_p^a} + \eta \sigma_{ps} v_p, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{\tau_s^a} + \eta \frac{v_s^3}{v_p^2} \sigma_{ps}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

The solution of (2.61) is therefore

$$\begin{pmatrix} E_p(t) \\ E_s(t) \end{pmatrix} = e^{-\alpha_p t} \begin{pmatrix} E_p(t=0) \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\alpha_s t} \begin{pmatrix} 0 \\ E_s(t=0) \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

The absorption is too strong for multiple scattering to scramble the initial energy distribution of the source. As a result, compressional and shear energy decay differently and no energy equipartition is reached.

On the other hand, for weak dissipation, $\tau_{p,s}^a \gg \tau_{eq}^0$, the absorption matrix \underline{A} is a perturbation of the collision matrix \underline{J} . Standard first-order perturbation theory yields,

$$\underline{E}(t) = \chi \exp(-t/\tau_{abs}) \left(\underline{E}_0^{abs} + \mu_0 \exp(-t/\tau_{eq}) \underline{E}_1^{abs} \right), \quad (2.66)$$

where

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_{abs}} = \left(\frac{1}{1+2v_p^3/v_s^3} \right) \frac{1}{\tau_p^a} + \left(\frac{2v_p^3/v_s^3}{1+2v_p^3/v_s^3} \right) \frac{1}{\tau_s^a}, \\ \frac{1}{\tau_{eq}} = \frac{1}{\tau_{eq}^0} + \frac{v_p^3 - v_s^3/2}{v_p^3 + v_s^3/2} \left(\frac{1}{\tau_p^a} - \frac{1}{\tau_s^a} \right), \end{cases} \quad (2.67)$$

and the ratio E_s^{abs}/E_p^{abs} of the vector \underline{E}_0^{abs} is

$$\frac{E_s^{abs}}{E_p^{abs}} = \frac{2v_p^3}{v_s^3} \left[1 + \tau_{eq}^0 \left(\frac{1}{\tau_p^a} - \frac{1}{\tau_s^a} \right) \right]. \quad (2.68)$$

The time decay of the energy density is now identical for both modes and given by a weighted sum of $1/\tau_p^a$ and $1/\tau_s^a$ (similar to the elastic diffusion constant (2.39)). Despite the presence of dissipation an energy partition can set in. This perhaps counterintuitive result comes from mode conversions in the medium. One cannot assume that the shear mode decays as $\exp(-t/\tau_s^a)$ and the compressional mode as $\exp(-t/\tau_p^a)$ since they are constantly converted into each other. Note that, if $\tau_s^a = \tau_p^a$, neither the equipartition ratio nor the equipartition time is affected. If the shear absorption dominates ($\tau_s^a < \tau_p^a$), which is the most realistic case, the equipartition ratio E_s/E_p decreases, whereas the equipartition time increases. These results are in agreement with a calculation done by Margerin *et al* [20].

2.5 Solution for a half-space with a free surface boundary condition.

Using the generalized diffusion equation (2.28) we will now investigate the influence of the free surface boundary condition on the energy partition. For a non-absorbing half-space with a free surface condition, equipartition is the steady-state solution of equations (2.28) and (2.49).

First, we look for the most general, time-independent, solution of equation (2.28). One obvious solution is of the form

$$\underline{E}(z) = \chi(1 + \mu_1 z)\underline{E}_0, \quad (2.69)$$

where \underline{E}_0 is defined in equation (2.59) and χ and μ_1 are positive constants. Two other solutions are

$$\underline{E}(z) = e^{\pm \underline{K}z} \cdot \underline{Y}, \quad (2.70)$$

where $\underline{K}^2 \equiv \underline{D}^{-1} \cdot \underline{J}$ and \underline{Y} is an arbitrary vector. In order to explicitly evaluate $e^{\pm \underline{K}z}$ it is convenient to work in the basis (denoted by a tilde) with respect to which \underline{J} is diagonal. In this particular basis, \underline{K}^2 takes the following form:

$$\widetilde{\underline{K}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{D}_{12}^{-1}/\tau_{eq}^0 \\ 0 & \widetilde{D}_{22}^{-1}/\tau_{eq}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

It is not very difficult to see that $\underline{\underline{K}}$ is given by

$$\underline{\underline{K}} = k_{mc} \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{D}_{12}^{-1}/\widetilde{D}_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

where $k_{mc} = \sqrt{D_e/(\det(\underline{\underline{D}})\tau_{eq}^0)}$. Hence,

$$e^{\pm \underline{\underline{K}}z} = e^{\pm k_{mc}z} \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{D}_{12}^{-1}/\widetilde{D}_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{D}_{12}^{-1}/\widetilde{D}_{22}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

After developing the product $e^{\pm \underline{\underline{K}}z} \cdot \underline{\underline{Y}}$ for an arbitrary vector $\underline{\underline{Y}}$ and upon transforming back to the initial basis gives the following time-independent solution for the generalized diffusion equation (2.28),

$$\underline{E}_{eq}(z) = \chi \left[(1 + \mu_1 z) \underline{E}_0 + \mu_2 \exp(-k_{mc}z) \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{E}_1 \right], \quad (2.74)$$

where \underline{E}_1 is defined in (2.59), χ is a normalization factor and $\mu_{1,2}$ are arbitrary positive constants. The solution $\exp(+k_{mc}z)$ has been removed since it gives rise to a divergent current as $z \rightarrow \infty$.

The constants μ_1 and μ_2 are determined by the boundary condition. For the half-space with free surface boundary, relation (2.74) must obey the boundary condition (2.49). The form (2.56) of the matrix $\underline{\underline{C}}$ implies

$$\left(\frac{a}{v_p^3} + \frac{b}{2v_s^3} + \mu_2(\xi + k_{mc}) \right) \underline{E}_1 - \mu_1 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{E}_0 = 0, \quad (2.75)$$

where ξ is

$$\xi = \underline{U}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{E}_1, \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Since $a/b = -2v_p^3/v_s^3$ and $\xi \neq -k_{mc}$ we see that equation (2.75) is satisfied if and only if both $\mu_1 = 0$ and $\mu_2 = 0$. Hence, the equipartition solution of the generalized diffusion equation (2.28) in the presence of a free surface is

$$\underline{E}_{eq}(z) = \chi \begin{pmatrix} 1/v_p^3 \\ 2/v_s^3 \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

We conclude that the free surface has no influence on the local partition of energy. This surprising result is closely related to equations (2.52) and (2.53). The free surface boundary condition has the same symmetry as the scattering cross-sections. It does not influence the genuine energy partition of a multiple scattering unbounded medium.

equations,

$$\partial_t \underline{E}(z, t) - \underline{D} \cdot \Delta \underline{E}(z, t) = -\underline{J} \cdot \underline{E}(z, t), \quad (2.78)$$

$$\underline{C}_1 \cdot \underline{E}(0, t) - \underline{D} \cdot \underline{E}'(0, t) = \underline{0}, \quad (2.79)$$

$$\underline{C}_2 \cdot \underline{E}(H, t) + \underline{D} \cdot \underline{E}'(H, t) = \underline{0}. \quad (2.80)$$

The matrix \underline{C}_1 , associated to the traction-free boundary, is given by equation (2.56) whereas the matrix \underline{C}_2 , given by equation (2.49), is calculated from the reflection coefficients at the lower boundary, which are functions of the Lamé coefficients of the layer and the solid underneath [22].

Mathematically, we are seeking for a solution in terms of diffusion modes [23],

$$\underline{E}(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-t/\tau_m) \underline{E}_m(z), \quad (2.81)$$

whose asymptote is

$$\underline{E}_{eq}(z, t) = \exp(-t/\tau_0) \underline{E}_0(z). \quad (2.82)$$

The exponential time decay describes the leaking of energy at the lower boundary. For each diffusion mode $\exp(-t/\tau_m) \underline{E}_m(z)$, both compressional and shear modes decay at the same rate due to mode conversions in the medium. This holds true as long as the energy leakage at the solid-solid interface is not too strong. Inserting the diffusion mode $\exp(-t/\tau_m) \underline{E}_m(z)$ in equation (2.78) yields the following differential equation for $\underline{E}_m(z)$,

$$\frac{\partial \underline{E}_m(z)}{\partial z^2} = -\underline{K}_m^2(\tau_m) \cdot \underline{E}_m(z), \quad (2.83)$$

where $\underline{K}_m^2(\tau_m) = \underline{D}^{-1} \cdot (\underline{1}/\tau_m - \underline{J})$. Equation (2.83) can straightforwardly be solved for $\underline{E}_m(z)$ in terms of the matrix $\underline{K}_m(\tau_m)$. Inserting the solution $\underline{E}_m(z)$ of (2.83) into the boundary conditions (2.79) and (2.80) provides an equation for the time decay τ_m that can be solved numerically.

For simplicity we shall restrict our analysis to two Poisson solids (*i.e.* $\lambda = \mu$) for which $v_s = v_p/\sqrt{3}$ so that the equipartition value for the unbounded medium becomes $E_s/E_p = 2v_p^3/v_s^3 = 10.39$. Figure 2.3 shows the decay time τ_0 of the equipartition vector $\underline{E}_{eq}(z, t)$ as a function of the thickness H of the slab for a velocity mismatch of the solid-solid boundary $v_{s2}/v_{s1} = 1.3$ (a typical seismic value). The scattering parameter is $x = k_s a = 1.7$ where k_s is the shear wave number and a the size of the Rayleigh-Gans scatterers in the medium. The decay time τ_0 has been normalized by the decay time,

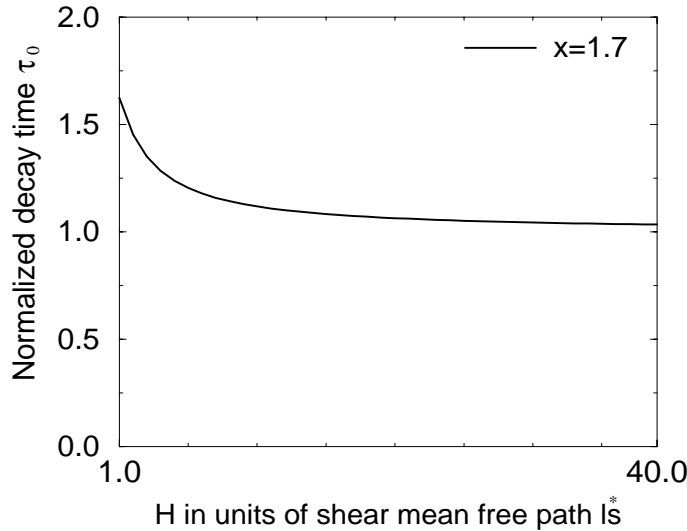


FIG. 2.3 - Plot of the decay time τ_0 of the equipartition vector normalized by τ_0^{scal} , see text for discussion, as a function of the thickness of the slab in units of shear mean free path l_s^* . The velocity mismatch of the solid-solid interface is set to $v_{s_2}/v_{s_1} = 1.3$ while the size parameter of the scatterers is $x = 1.7$.

τ_0^{scal} , of the conventional diffusion approximation (2.38). In that case the leakage at the lower boundary is obtained using a scalar extrapolation length z_0 that disregards the compressional mode P [14]. The conventional time decay is given by [14]

$$\tau_0^{scal} = \frac{H^2}{\alpha^2 D_e} \quad \text{with} \quad \alpha \tan \alpha = \frac{H}{z_0} \quad \text{and} \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]. \quad (2.84)$$

Figure 2.3 shows that only for relatively thin slabs the ratio τ_0/τ_0^{scal} is bigger than 1 but converges to 1 as the thickness increases. Apparently, the conventional diffusion approximation tends to underestimate the leakage of energy at the solid-solid boundary since it disregards the outgoing flux of the compressional P mode. If the scattering mean free time is kept constant the decay time τ_0 is almost independent of the size of the scatterers. Our diffusion approximation is likely to break down when the thickness of the plate is smaller than one scattering mean free path.

Figure 2.4 shows the depth dependence of the ratio $E_s(z)/E_p(z)$ of the equipartitioned vector $\underline{E}_0(z)$ for two different plate thickness, $H = 30l_s^*$ (solid line) and $H = 2l_s^*$ (dotted line). The velocity mismatch of the solid-solid boundary is set equal to $v_{s_2}/v_{s_1} = 1.3$ while the size parameter of the scatterers is $x = k_s a = 1.7$. Clearly for a thick plate ($H = 30l_s^*$), the ratio E_s/E_p is not affected at all by the leakage at the lower boundary.

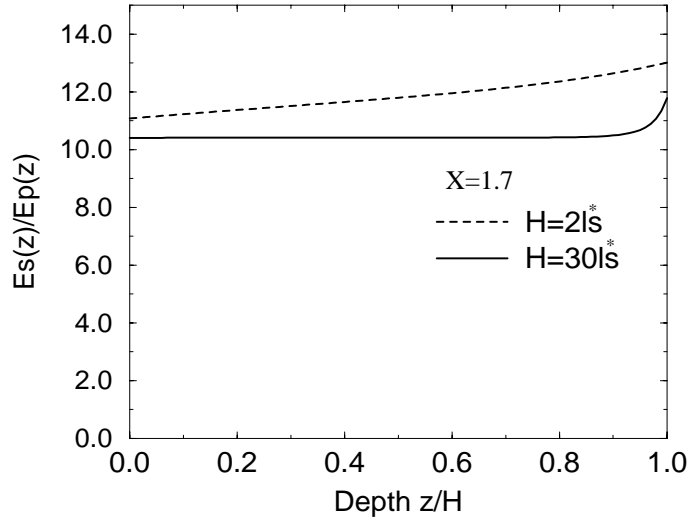


FIG. 2.4 - Depth dependence of the energy equipartition ratio E_s/E_p for two different plate thickness: $H = 30l_s^*$ (solid line) and $H = 2l_s^*$ (dotted line). The size parameter of the scatterers is $x = 1.7$ and the velocity mismatch at the solid-solid interface is set to $v_{s_2}/v_{s_1} = 1.3$.

In that case the two boundaries act independently. At the solid-solid interface we find a ratio of $E_s(H)/E_p(H) = 11.8$ which is 15% higher than the free-surface value. On the other hand, for a thin plate ($H = 2l_s^*$) the leakage at the lower boundary slightly modifies the ratio at the free surface: $E_s(z = 0)/E_p(z = 0) = 11$. At the solid-solid interface we find a ratio of $E_s(H)/E_p(H) = 13$ which is 25% higher than the free-surface value.

Finally, figures 2.5 and 2.6 show, for the plate thickness $H = 30l_s^*$ and $H = 2l_s^*$ and for different scattering parameters x , the influence of the velocity mismatch v_{s_2}/v_{s_1} on the equipartition value at the solid-solid interface. For $v_{s_2}/v_{s_1} \rightarrow 0$ and $v_{s_2} \gg v_{s_1}$, the equipartition ratio at the solid-solid interface takes the value for the free surface. Within these extremes the energy ratio fluctuates between 6 to 13.

2.7 Conclusions.

We have applied a generalized diffusion approximation to the equation of radiative transfer of elastic waves. This diffusion approximation leads, in the case of spherically symmetric scatterers, to a generalized diffusion equation in which the diffusion constant D becomes a 2×2 matrix. This equation describes the time and space evolution of

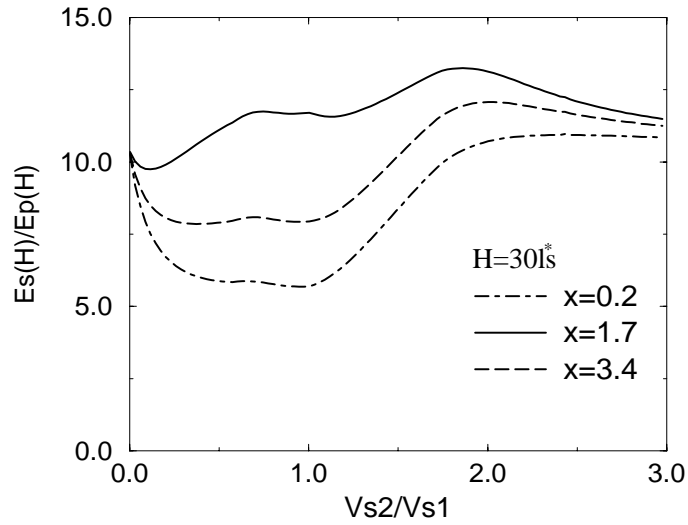


FIG. 2.5 - Energy partition ratio E_s/E_p at the solid-solid interface as a function of the velocity mismatch v_{s_2}/v_{s_1} . The plate thickness is kept constant at $H = 30l_s^*$ and the size parameter of the scatterers are $x = 0.2, 1.7$ and 3.4 .

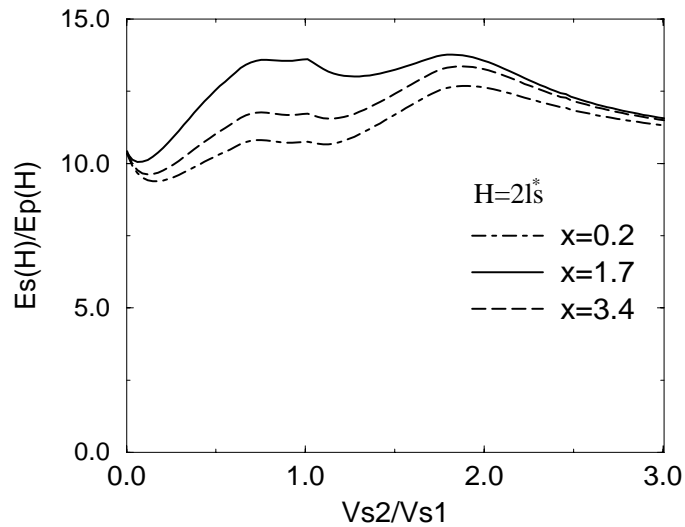


FIG. 2.6 - Energy partition ratio E_s/E_p at the solid-solid interface as a function of the velocity mismatch v_{s_2}/v_{s_1} . The plate thickness is kept constant at $H = 2l_s^*$ and the size parameter of the scatterers are $x = 0.2, 1.7$ and 3.4 .

both compressional and shear energy densities. We showed that the conventional diffusion equation is a limit of the generalized diffusion equation when the time to complete equipartition between compressional and shear modes has been reached. This equipartition time is dependent on the details of the scattering mechanism whereas the energy equipartitioning is not.

We have studied the effect of absorption on the energy equipartition ratio and find that for weak dissipation an energy partition sets in. The value of the energy ratio is shifted in favor of the mode that is the least dissipated. Mode conversions on the boundary can be described by a generalized “Milne” boundary condition. Quite surprisingly the traction-free boundary does not affect the energy partition ratio near the boundary. In the case of a layer bounded by a free-surface and a solid-solid interface, we have shown that the leakage at the boundary affects the energy equipartition in a skin layer on the scale of the transport mean-free path.

In conclusion, the generalized diffusion equation is a “missing step” between the equation of radiative transfer and the conventional diffusion approximation for the equation of radiative transfer. It gives access to many aspects of elastic wave diffusion, such as dissipation, mode conversion, leakage and equipartition time without losing the simplicity of the diffusion equation.

Acknowledgment

The authors would like to thank L. Margerin, M. Campillo, C. Lacombe, R. Hennino, F. Faure and R. Maynard for many helpful discussions during the preparation of this work. This work was supported by the *Groupe ment de Recherche 1874 PRIMA* of the CNRS.

Bibliographie

- [1] H. Sato et M. Fehler. *Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*. Springer-Verlag, 1991.
- [2] S. Hirsekorn. The scattering of ultrasonic waves by multiphase polycrystals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83:1231, 1988.
- [3] R. Weaver. Diffusivity of ultrasound in polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.*, 38:55, 1990.
- [4] R. Weaver. On diffuse waves in a solid media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71:1608, 1982.
- [5] L. Ryzhik G. Papanicolaou et J. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, 24:327, 1996.
- [6] G. Papanicolaou L. Ryzhik et L. Keller. Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, page 1107, 1996.
- [7] G. Papanicolaou L. Ryzhik et J. Keller. Erratum to: Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 86, 1996.
- [8] N. Shapiro M. Campillo L. Margerin S. Singh V. Kostoglodov et J. Pacheco. The energy partitioning between P and S waves and the diffusive character of the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90:655, 2000.
- [9] J. Turner et R. Weaver. Radiative transfer of ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3654, 1994.
- [10] J. Turner et R. Weaver. Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3675, 1994.

- [11] J. Turner et R. Weaver. Time dependence of multiply scattered diffuse ultrasound in polycrystalline media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97:2639, 1995.
- [12] J. Turner et R. Weaver. Ultrasonic radiative transfer in polycrystalline media: Effects of a fluid-solid interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98:2801, 1995.
- [13] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves. *Geoph. Res.*, 105(B4):7873, 2000.
- [14] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q . *Geophys. J. Int.*, 134:596, 1998.
- [15] L. Margerin M. Campillo N. Shapiro et B. van Tiggelen. Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in Mexico. *Geophys. J. Int.*, 138:343, 1999.
- [16] H. Van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover New York, 1981.
- [17] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. Academic Press New York, 1978.
- [18] C. Soukoulis, editor. *Localization and Propagation of Classical Waves in Random and Periodic Structures*. Plenum Publishing Corporation New York, 1993.
- [19] K. Aki. Scattering conversions P to S versus S to P . *Bull. Seism. Soc. Am.*, 82:1969, 1992.
- [20] L. Margerin B. van Tiggelen et M. Campillo. Effect of absorption on energy equipartition of elastic waves in the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, submitted, 2001.
- [21] J.P. Fouque, editor. *Diffuse Waves in Complex Media*, page 383. Kluwer Dordrecht, 1999.
- [22] A. Ben-Menahem et S. Singh. *Seismic waves and sources*. Springer-Verlag New York, 1981.
- [23] J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, 1975.

Chapitre 3

Transport d'ondes élastiques dans un milieu quasi 2D

Quasi Two-dimensional Transfer of Elastic Waves

Nicolas Trégourès et Bart van Tiggelen

Article soumis au Physical Review E, 2001.

Abstract A theory for multiple scattering of elastic waves is presented in a random medium bounded by two ideal free surfaces, whose horizontal size is infinite and whose transverse size is smaller than the mean free path of the waves. Some aspects of this geometry are relevant for seismic wave propagation in the Earth crust. We derive a time-dependent, quasi-2D radiative transfer equation (*i.e.* two horizontal dimensions with a finite number of vertical mode), that describes the coupling of the eigenmodes of the layer (surface Rayleigh waves, SH waves, and Lamb waves). Expressions are found that relate the small-scale fluctuations to the life time of the modes and to their coupling rates. We discuss a diffusion approximation that simplifies the mathematics of this model significantly, and which should apply at large lapse times. Finally, coherent backscattering is studied within the quasi-2D radiative transfer equation for different source and detection configurations.

3.1 Introduction

Multiple scattering of waves in random media has been studied throughout the previous century [1] and is still an active domain of research [2, 3]. The subject is rich in its interdisciplinarity aspects, with roots in astrophysics, optics, acoustics and quantum mechanics, with many fundamental problems, among which wave localization, the random laser, speckles, enhanced backscattering [4], optics of liquid crystals [5], and (broken) time-reversal symmetry [6] as contemporary examples. In addition, such studies have found potential applications, like in polymer dispersed liquid crystals, in remote sensing, in (medical imaging), and in seismology.

A general theoretical study of multiple scattering is very complex. Different studies of multiple scattering consider different geometries in which the scattering occurs, and for which some sort of specific mathematical simplification facilitates a solution. In the Quasi 1D geometry only the lowest radial diffusion mode of a tube is excited, and is therefore very useful for rigorous mesoscopic studies of transmission fluctuations (see contributions in [7]). The “slab geometry”, with “infinite” transverse width is the standard geometry encountered in optical laboratory experiments. Media with higher symmetry are also regularly found. One-dimensional disordered systems are popular for their theoretical rigor [8]. Two-dimensional random media are encountered in studies of the quantum Hall effect, plasmons, bending waves [9] and micro-waves [10], or in acoustics [11].

The present work studies a geometry that has came up in a recent implementation of multiple scattering and enhanced backscattering of seismic waves, having a number of specific features not encountered elsewhere. First, all measurements take place at the surface of the Earth and as a result, they suffer from coherent reflections and mode-conversions. To be of any relevance to seismology, a multiple scattering theory should be capable of describing the boundaries in a very precise way, preferentially on the level of the wave equation. However, standard transport equations, as the equation of radiative transfer [1], do not have this property. All phase information has been lost, and the accuracy of its spatial resolution is estimated to be some small fraction of the mean free path, estimated to be at least equal to 40 km for seismic waves, much bigger than the seismic wavelength. The equation of radiative transfer has been studied in ultrasonics for elastic waves at much higher frequencies [12, 13, 14, 15], for which the complication of near-field detection is much less a problem. Our approach facilitates a study of many contemporary phenomena, such as equipartition and coherent backscattering, for measurements taking place near the free surface, including the elastic mode conversions [16, 17], using an almost

conventional “quasi-2D” radiative transfer equation.

Three important conditions for our model to apply to the Earth crust are met. First, the Earth surface is indeed to a very good approximation a free surface. Secondly, the crust has a depth of roughly 30 km which is indeed less than the estimated mean free path $\ell \approx 50$ km of the seismic waves. Thirdly, the distances involved in typical measurements (in the frequency band 1-10 Hz) of local earthquakes are up to 100 km, and thus indeed small enough to neglect the rounding of the Earth, and to model the crust by a flat infinite layer. A fourth condition is not met. The crust-mantle interface (the so-called Moho) is not a free surface, but rather a solid-solid interface that allows partial leaking of energy into the mantle. Monte-Carlo simulations [18, 19] have established that such leaking, hampered by multiple scattering, can in fact explain a very distinguished and universal feature of seismograms: the Coda Q , observed first by Aki [20] and Aki and Chouet [21]. The seismic coda refers to the exponentially decaying signal following the arrival of direct waves in the seismograms of regional earthquakes.

Our model must, can and will be adapted to incorporate small leaking at the second interface, but we do not wish to do that here. A number of interesting other features do not or hardly depend on this leakage. The first one was discussed recently by us [22]. Our Quasi-2D model reproduces successfully various equipartition ratios among different elastic energies near the free surface, that were deduced from seismograms registered in Mexico. In the present work we also obtain coherent backscattering profiles predicted by the Quasi-2D model. Also for this phenomenon, so far not observed in seismology, the leakage process is not very important. Finally, we would like to emphasize that other situations exist where a variant of the “quasi-2D” approach might be relevant. De Rosny, Tourin and Fink [23] recently considered coherent backscattering of elastic waves in Silicon wafers, with a small number of vertical modes.

The set-up of this paper is as follows. In section 2 we look at the wave equation for elastic waves, and we will define the Green’s function for elastic wave propagation. In section 3 we introduce small-scale fluctuations and define the ensemble-averaged Green’s function. This provides us with the extinction times of all elastic modes. They will serve to define our quasi-2D approximation. In section 4, the transport equation is derived, which describes the time-evolution of the ensemble-averaged energy-contents of all individual modes, and whose stationary solution exhibits equipartition of energy between all modes. In section 5, we discuss the application of the well-known diffusion approximation to this quasi-2D model, introducing a $N \times N$ diffusion tensor for N modes. Finally, in section 6 we investigate coherent backscattering using our Quasi-2D approximation for different

source and detection configurations. Section 7 is devoted to conclusions and perspectives.

3.2 A Schrödinger-type equation for Elastic Waves

In this section we will formulate the mathematics of elastic wave propagation in a way that is suited to apply conventional methods in multiple scattering of waves. Many elements have already been discussed very thoroughly by Ryzhik *et al* [24], and some will be recalled here for convenience. We start out with Newton's second law for the elastic displacement \mathbf{u} at time t and position \mathbf{r} ,

$$\rho(\mathbf{r})\partial_t^2 u_i = \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}) + f_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

Here, $\rho(\mathbf{r})$ is the local mass density, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ is an external force per unit volume, and $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ is the stress tensor which, by Hooke's law, is given by [16, 17, 25]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= C_{ijkl}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \\ &= \lambda(\mathbf{r})\varepsilon_{kk}(\mathbf{r})\delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

with $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k)$ the strain tensor. As always, summation over repeated indices is assumed implicitly. The second equality applies to an isotropic elastic medium, in which case the four-rank tensor C_{ijkl} can only have two independent contributions, proportional to the Lamé moduli $\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r})$. Inserting the expression (3.2) of the stress tensor in Eq. (3.1) provides the wave equation for the elastic displacement \mathbf{u} :

$$\rho(\mathbf{r})\partial_t^2 u_i - [\lambda(\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{r})]\partial_i \partial_k u_k - \mu(\mathbf{r})\partial_i \partial_i u_i = [\partial_i \lambda(\mathbf{r})](\partial_k u_k) + 2[\partial_j \mu(\mathbf{r})]\varepsilon_{ji} + f_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.3)$$

If the Lamé coefficients, $\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r})$, are independent of \mathbf{r} , Eq. (3.3) further simplifies to the well-known wave equation

$$\partial_t^2 \mathbf{u} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r})}, \quad (3.4)$$

where the second term of the left-hand side of (3.4) corresponds to a compressional bulk wave (also called P wave) which propagates with the velocity $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho(\mathbf{r})}}$ and the third term of the left-hand side of (3.4) describes a shear bulk wave (S wave) with velocity $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho(\mathbf{r})}}$. For reasons that will be clear in the following sections, we will not use the form (3.3) of the elastic wave equation but formulate an equivalent equation more suitable for the purpose of elastic wave scattering and transport.

The total energy of the elastic displacement \mathbf{u} is given by [25]

$$E_{\text{tot}} = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})(\partial_t\mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{r})(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \mu(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ji} \right]. \quad (3.5)$$

It is customary to split off a term $\mu(\text{curl } \mathbf{u})^2$ (describing pure shear wave energy) and $2\mu(\text{div } \mathbf{u})^2$ (contributing to compressional energy) from the last term, leaving a rest term I

$$E_{\text{tot}} = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})(\partial_t\mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}(\lambda(\mathbf{r}) + 2\mu(\mathbf{r}))(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{r})(\text{curl } \mathbf{u})^2 + I \right]. \quad (3.6)$$

This identifies four terms as “kinetic energy”, “compressional energy”, “shear energy” and an interference term I [22, 25, 26]. The latter vanishes for plane waves with either pure transverse or pure longitudinal polarization. Following Ryzhik *et al* [24] we shall now introduce the vector field

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda(\mathbf{r})}{2}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \\ \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{2}} i\partial_t\mathbf{u} \\ -i\sqrt{\mu(\mathbf{r})} \varepsilon_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

where we have defined the operator $\mathbf{p} = -i\nabla$. This vector has 13 components among which only 9 are independent since ε_{ij} is a symmetric tensor whose trace is proportional to the first component, $\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$, of Ψ . The physical interpretation of the vector field Ψ is made clear by introducing the Cartesian scalar product

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle \equiv \int d^3\mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}, t)^* \cdot \Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})(\partial_t\mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{r})(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \mu(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ji} \right], \quad (3.8)$$

which corresponds to the total elastic energy (3.5). As a result Ψ can be regarded as a *complex amplitude for elastic energy*. The first and third component of Ψ correspond to the *potential* energy amplitude while the second component describes the *kinetic* energy amplitude. Moreover, it can readily be checked that the wave equation (3.3) is equivalent to the following Schrödinger-type equation for Ψ [24],

$$i\partial_t |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot |\Psi(t)\rangle + |\Psi_f(t)\rangle, \quad (3.9)$$

with the time-evolution operator,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda(\mathbf{r})} \vec{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} & \vec{\mathbf{0}} \\ \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \mathbf{p} \downarrow \sqrt{\lambda(\mathbf{r})} & \vec{\mathbf{0}} \downarrow & \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \vec{\mathbf{L}}(\mathbf{p}) \downarrow \sqrt{2\mu(\mathbf{r})} \\ \mathbf{0} \downarrow\downarrow & \sqrt{2\mu(\mathbf{r})} \vec{\mathbf{L}}(\mathbf{p}) \downarrow\downarrow \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} & \vec{\mathbf{0}} \downarrow\downarrow \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

and the external force-term $\Psi_f(\mathbf{r}, t) \equiv (0, -\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)/\sqrt{\rho(\mathbf{r})}, \vec{0})$. We have introduced the third rank tensor $L_{ijk}(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2}(p_i\delta_{jk} + p\delta_{ik})$ and used the formal Dirac notation for vector fields to facilitate later the more convenient mode base. The number of arrows determines the order of the tensor. For clarity, we have put horizontal arrows when they contract in a right-hand side product with a vector. If $\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r})$ are real-valued, the matrix \mathbf{K} is manifestly symmetrical with respect to the ordinary Cartesian scalar product (3.8).

Equation (3.9) can easily be Laplace-transformed ($\text{Im } z > 0$). This yields the solution

$$|\Psi(z)\rangle = [z - \mathbf{K}]^{-1} [i|\Psi(t=0)\rangle + |\Psi_f(z)\rangle]. \quad (3.11)$$

The operator $[z - \mathbf{K}]^{-1} \equiv \mathbf{G}(z)$ will be called the Green's function, and is introduced here for future need. It is convenient to define $t = 0$ just before the source sets in so that $\Psi(t=0) = 0$ and the force field becomes the source for wave propagation.

We would like to point out that the description of elastic waves in term of the vector field Ψ and its time-evolution equation (3.9) is mathematically equivalent to the wave equation (3.3) even when the mass density and the Lamé coefficients depend on \mathbf{r} . The formulation (3.9) is more convenient to study elastic wave scattering and transport.

3.3 Propagation of Elastic Waves in a Layer

Let us model the Earth's crust by a heterogeneous elastic plate of infinite horizontal dimension and of thickness H . In this paper, we will assume that both sides of the plate are free surfaces and we therefore neglect any leakage of energy into the underlying mantle. This model is only a first step and we will address the leaking of energy from the crust to the mantle in future work. Nevertheless, we believe that this model captures some crucial physical elements, among which a few do not even depend on this leakage: Our model incorporates coherent reflection, mode-conversions and, most importantly, surface Rayleigh waves at the surface of the Earth. All these phenomena are crucial elements to consider in seismic measurements.

The disorder in the crust will be modeled by random fluctuations of the mass density $\rho(\mathbf{r})$, and the Lamé coefficients $\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r})$. The explicit statistics of the fluctuations will be specified more precisely later on. These fluctuations are known to be of the order of only a few percents of the average mass density ρ_0 and Lamé coefficients λ_0, μ_0 and we will be able to treat them as perturbations.

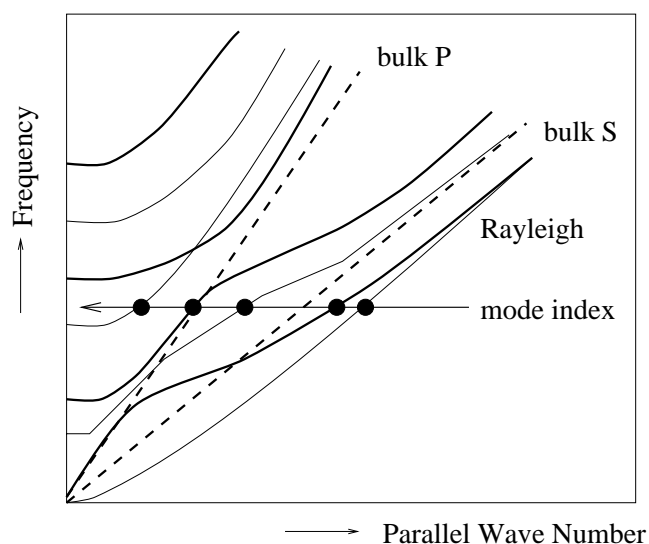


FIG. 3.1 - Schematic plot of the dispersion law of the elastic Rayleigh-Lamb eigenmodes in a layer bounded by two free surfaces. Bold lines indicate symmetric branches, straight lines indicate anti-symmetric modes. Only modes of different symmetry are allowed to cross. The two dashed lines indicate the pure shear or pure compressional excitations. The surface Rayleigh waves propagate somewhat slower than pure S waves.

3.3.1 Eigenmodes of a homogeneous elastic plate

The displacement eigenmodes of a homogeneous elastic plate have been discussed in great detail by Weaver [27, 28]. They can be separated into two sub-classes, each of these classes consists of an infinite number of branches. Moreover, due to the symmetry of the boundary conditions of the plate, each sub-classes is made of symmetric and anti-symmetric branches. The simpler class is the one of SH modes. These waves are pure shear waves and have a displacement field polarization parallel to the boundaries and normal to the direction of propagation [27, 28]. The class of Lamb modes consist of a mixture of shear and compressional displacements since a pure compressional displacement does not obey traction-free boundary conditions. Figure 3.1 gives a schematic plot of the dispersion law of Lamb modes. The representation (3.7) of each mode can be obtained straightforwardly from its displacement and we shall denote it by Ψ_n . The index n is a discrete index that labels, at constant frequency, the symmetric and anti-symmetric Lamb modes and symmetric and anti-symmetric SH modes in the plate.

For the sake of concreteness let us discuss the antisymmetric Lamb modes at a given frequency, indicated by normal lines in Figure 3.1. The first antisymmetric mode (first black dot on the right in Figure 3.1) is an antisymmetric Rayleigh surface mode. Its

displacement is evanescent for both the compressional and the shear component. Rayleigh modes propagate somewhat slower than bulk S or P waves. As a result they lie on the right of the two dashed lines indicating the pure shear and pure compressional excitations. The second antisymmetric Lamb mode (third black dot) lies between the two dashed lines indicating the pure shear and pure compressional excitations. This mode is evanescent for its compressional component but has a “bulk” propagating shear displacement. It behaves like a pure shear mode as we go away from either one of the free surfaces. As a matter of fact its potential energy is mostly shear since its compressional potential energy turns out to be negligible. Finally, the antisymmetric mode most on the left in Figure 3.1 lies on the left of the lines that indicates pure shear and pure compressional excitation. Even deep inside the plate this mode is a mixture of P and S displacements. As we increase the frequency, this organization of Lamb modes stays intact. One finds two surface Rayleigh modes (symmetric and antisymmetric), evanescent P but bulk S modes and modes that are both bulk S and bulk P .

By translational symmetry, the eigenmodes can be chosen proportional to transverse plane waves with wave number \mathbf{k} . We will treat them initially as $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})/\sqrt{A}$, with a discrete contribution of \mathbf{k} to the label n as a result of the periodic boundary conditions on both sides of a square plate with surface A , and eventually take the limit $A \rightarrow \infty$.

3.3.2 Extinction time of the eigenmodes Ψ_n

We will now assume the presence of disorder in the plate. As a result each eigenmode Ψ_n of the homogeneous plate will achieve a finite life time τ_n .

The first step to formulate a transport theory is to calculate the Green's function averaged over this random disorder [29]. The exact meaning of this averaging in seismic observations will be addressed elsewhere. Let the disorder be represented by a perturbation $\delta\mathbf{K}$ in the time-evolution operator: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \delta\mathbf{K}$. The ensemble-averaged “retarded” (outgoing) Green's function at frequency ω is given by,

$$\langle \mathbf{G}(z = \omega + i0) \rangle = \left\langle \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{K}} \right\rangle \equiv \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{K}_0 - \Sigma(\omega)}. \quad (3.12)$$

This “Dyson” equation defines the mass-operator $\Sigma(\omega)$. The lowest order contribution is given by [30],

$$\Sigma(\omega) = \left\langle \delta\mathbf{K} \cdot \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{K}_0} \cdot \delta\mathbf{K} \right\rangle + \mathcal{O}(\delta\mathbf{K})^3. \quad (3.13)$$

Next, we can insert the complete and orthonormal set $\{\Psi_n\}$ of the homogeneous plate,

defined above. Standard first-order perturbation theory yields,

$$\mathbf{G}(\omega) = \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|}{\omega - \omega_n - \Sigma_n(\omega)}, \quad (3.14)$$

with

$$\Sigma_n(\omega) = \sum_m \left\langle |\langle \Psi_n | \delta \mathbf{K} | \Psi_m \rangle|^2 \right\rangle \frac{1}{\omega - \omega_m + i0}. \quad (3.15)$$

The imaginary part of this parameter is negative, and is identified with $-1/2\tau_n$, where τ_n is the extinction time of mode n .

In general, $\rho(\mathbf{r})$, $\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r})$ are random variables. We will simplify the problem by assuming that the mass density is constant, $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$, and that velocity fluctuations are due to fluctuations in the two Lamé coefficients: $\lambda(\mathbf{r}) = \lambda_0 + \delta\lambda(\mathbf{r})$ and $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 + \delta\mu(\mathbf{r})$, with λ_0 and μ_0 the coefficients of the homogeneous layer. In that case,

$$\delta \mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \begin{pmatrix} 0 & (\delta\lambda(\mathbf{r})/2\sqrt{\lambda_0}) \vec{\mathbf{p}} & \vec{\mathbf{0}} \\ \mathbf{p} \downarrow (\delta\lambda(\mathbf{r})/2\sqrt{\lambda_0}) & \vec{\mathbf{0}} \downarrow & \vec{\mathbf{L}}(\mathbf{p}) \downarrow (\delta\mu(\mathbf{r})/2\sqrt{2\mu_0}) \\ \mathbf{0} \downarrow \downarrow & (\delta\mu(\mathbf{r})/2\sqrt{2\mu_0}) \vec{\mathbf{L}}(\mathbf{p}) \downarrow \downarrow & \vec{\mathbf{0}} \downarrow \downarrow \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

A straightforward calculation, employing integration by parts, finally leads to,

$$\begin{aligned} \left\langle |\langle \Psi_n | \delta \mathbf{K} | \Psi_m \rangle|^2 \right\rangle &= \omega^2 \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \\ &\quad \{ \langle \delta\lambda(\mathbf{r})\delta\lambda(\mathbf{r}') \rangle (\nabla \cdot \mathbf{u}_n)^* (\nabla \cdot \mathbf{u}_m) (\nabla' \cdot \mathbf{u}'_n)^* (\nabla' \cdot \mathbf{u}'_m) \\ &\quad + \langle \delta\mu(\mathbf{r})\delta\mu(\mathbf{r}') \rangle \text{Tr} \varepsilon_n^* \cdot \varepsilon_m \text{Tr} (\varepsilon'_n)^* \cdot \varepsilon'_m \\ &\quad + \langle \delta\lambda(\mathbf{r})\delta\mu(\mathbf{r}') \rangle (\nabla \cdot \mathbf{u}_n)^* (\nabla \cdot \mathbf{u}_m) \text{Tr} (\varepsilon'_n)^* \cdot \varepsilon'_m + \text{c.c.} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

To evaluate $\Sigma_n(\omega)$ we must specify the spatial correlations between the Lamé coefficients. The simplest choice is to assume correlations that are short range with respect to the wavelength,

$$\langle \delta\lambda(\mathbf{r})\delta\lambda(\mathbf{r}') \rangle = \sigma_\lambda^2(z) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.18)$$

$$\langle \delta\mu(\mathbf{r})\delta\mu(\mathbf{r}') \rangle = \sigma_\mu^2(z) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.19)$$

$$\langle \delta\mu(\mathbf{r})\delta\lambda(\mathbf{r}') \rangle = \sigma_{\mu\lambda}^2(z) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.20)$$

Without extra difficulty, we can still allow for a depth dependence of the correlation functions. Σ_n can now be evaluated for a big plate for which $\sum_m \rightarrow \sum_i A \int d^2\mathbf{k}/(2\pi)^2$, including a sum over the different branches. All factors A cancel if a transverse plane

wave normalization $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ is adopted. For the extinction time of mode branch j at frequency ω , we find

$$\frac{1}{\tau_j(\omega)} = \omega^2 \sum_i n_i \int \frac{d^2\mathbf{k}_i}{2\pi} W(i\mathbf{k}_i, j\mathbf{k}_j). \quad (3.21)$$

with $n_i(\omega) \equiv k_i(\omega)/v_i(\omega)$ in terms of the group velocity $\mathbf{v}_i = d\omega_i/d\mathbf{k}_i$. The ‘‘mode scattering cross-section’’ is defined as,

$$\begin{aligned} W(i\mathbf{k}_i, j\mathbf{k}_j) &= \int_0^H dz \left\{ \sigma_\lambda^2(z) |\nabla \cdot \mathbf{u}_{i\mathbf{k}_i}|^2 |\nabla \cdot \mathbf{u}_{j\mathbf{k}_j}|^2 + \sigma_\mu^2(z) \left| \text{Tr} \varepsilon_{i\mathbf{k}_i}^* \cdot \varepsilon_{j\mathbf{k}_j} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_{\mu\lambda}^2(z) \text{Re} \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{i\mathbf{k}_i}^* \nabla \cdot \mathbf{u}_{j\mathbf{k}_j} \text{Tr} \varepsilon_{i\mathbf{k}_i}^* \cdot \varepsilon_{j\mathbf{k}_j} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

We have chosen to split of the factor n_i , so that this matrix is symmetric. According to our model the extinction time τ_j does not depend on the direction of the horizontal wave number \mathbf{k}_j .

The *imaginary* part of the ensemble-averaged Green’s function is directly related to the excitations of the waves [31]. The spectral density $\mathcal{N}(\omega)$ per unit surface can be expressed as,

$$\mathcal{N}(\omega) = -\frac{1}{\pi A} \text{Tr} \text{Im} \mathbf{G}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_i \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1/2\tau_{i\mathbf{k}}}{[\omega - \omega_{i\mathbf{k}}]^2 + 1/4\tau_{i\mathbf{k}}^2}. \quad (3.23)$$

Due to scattering, all modes are spectrally broadened. The separation in wavenumber of two adjacent modes with the same frequency (see Figure 3.1) is typically of order $1/H$. The uncertainty in k is typically $1/v_{i\mathbf{k}}\tau_{i\mathbf{k}}$, with $v_{i\mathbf{k}}$ the group velocity of the mode. If

$$\tau_{i\mathbf{k}} > H/v_{i\mathbf{k}}, \quad (3.24)$$

one can assume that different modes at fixed \mathbf{k} do not overlap, except at a few degeneration points where the dispersion curves for modes with different symmetry (i.e. *SH* and *Lamb*) cross. This assumption is the *Quasi-Two-Dimensional Approximation* (Q2DA). Criterion (3.24) is typically satisfied in the Earth crust, which has $H \approx 30$ km, a typical wave speed $\beta \approx 3.5$ km/s and a mean free time $\tau > 15$ s. In the Q2DA we find for the spectral density per unit surface $\mathcal{N}(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_i n_i$, showing that n_i , defined in Eq. (3.21), represents the spectral weight per unit surface of mode i at frequency ω in phase space.

In the following, all time scales will be normalized by the mean free time of *S* waves in an infinite medium with the same amount of disorder. This time depends only on σ_μ^2 which can be related to the correlation length and the shear velocity fluctuations. For a velocity fluctuation of 2% and a correlation length of 700 m, both typical seismic values, we get a

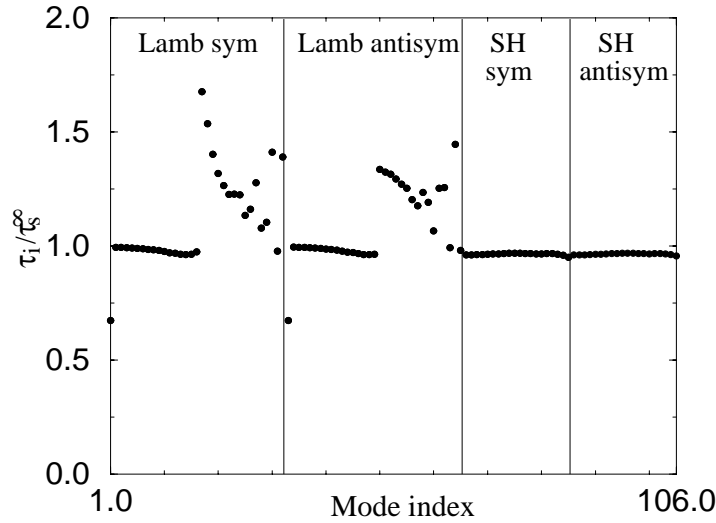


FIG. 3.2 - Extinction times for the different modes, calculated from Eq. (3.21), normalized by the mean free time of S waves in an infinite medium. The disorder is chosen to be uniform in the whole plate and the spatial correlation between the Lamé coefficients is chosen equal. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$, which has a number of $N = 106$ modes.

shear mean free path $\tau_s^\infty \approx 15$ s. Note that the correlation length is much smaller than the wavelength $\lambda_s = 1700$ m, which justifies the short range approximation of Eqs (3.20). For correlation lengths longer than the wavelength, one may apply the Rayleigh-Gans approximation to Eq. (3.17) [32].

Figure 3.2 shows extinction times for different modes index, calculated from Eqs. (3.21) and (3.22), normalized by the mean free time of S -waves in an infinite medium. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$, which has $N = 106$ modes. The disorder is chosen to be uniform in the whole plate, and the spatial correlations among the Lamé coefficients is taken equal: $\sigma_\lambda^2 = \sigma_\mu^2 = \sigma_{\mu\lambda}^2$. SH modes show an extinction time very similar to the extinction time of S -waves in an infinite medium τ_s^∞ . On the other hand the Lamb modes present a more complex pattern: Rayleigh modes clearly show a shorter extinction time, Lamb modes with an evanescent compressional component behave very much like a bulk S -wave. Finally, Lamb modes with both bulk compressional and bulk shear components behave in a complicated fashion but tend to have an extinction time larger than S -waves in an infinite medium.

In the case of dominant μ correlation, $\sigma_\lambda^2 \ll \sigma_\mu^2$ (dominant shear velocity fluctuations) the Lamb modes with both “bulk” compressional and shear components will have

a somewhat relatively larger extinction time. On the other hand, if the λ correlation dominates, $\sigma_\lambda^2 \gg \sigma_\mu^2$, (strong compressional velocity fluctuations), the same Lamb modes with ‘bulk’ compressional and shear displacements will have the shortest extinction time.

We would like to point out that the life time of Rayleigh waves is not well described by our model since they suffer most from surface disorder (fluctuations in height), which is not included in Eqs. (3.18). This might be done in future work.

3.4 Transport Equation in a Layer

The next task is the formulation of an elastic transport equation in the Quasi 2D Approximation. Basic observable is the ensemble-averaged intensity Green’s function $\langle \mathbf{G}(\omega^-) \times \mathbf{G}(\omega^+)^* \rangle$, with $\omega^\pm = \omega \pm \frac{1}{2}\Omega$. It can be expressed in the complete base $\{\Psi_n\}$ of the homogeneous plate, giving rise to the matrix element $L(\omega, \Omega)_{nn'mm'}$ (Figure 2). The Bethe-Salpeter equation [29, 31] for this object reads,

$$\mathcal{L}_{nn'mm'}(\omega, \Omega) = G_n(\omega^+)G_{n'}(\omega^-)^* \left[\delta_{nm}\delta_{n'm'} + \sum_{ll'} U_{nn'll'}(\omega, \Omega)\mathcal{L}_{ll'mm'}(\omega, \Omega) \right]. \quad (3.25)$$

with G_n the Dyson Green’s function defined in Eq. (3.12), and a new object U called the Irreducible Vertex. Upon introducing $\Delta G_{nn'}(\omega, \Omega) \equiv G_n(\omega^+) - G_{n'}^*(\omega^-)$ (idem for $\Delta\Sigma$) this equation can be re-arranged into,

$$\begin{aligned} [\Omega + (\omega_n - \omega_{n'}^*) - \Delta\Sigma_{nn'}] \mathcal{L}_{nn'mm'}(\omega, \Omega) &= \Delta G_{nn'}(\omega, \Omega) \times \\ &\left[\delta_{nm}\delta_{n'm'} + \sum_{ll'} U_{nn'll'}(\omega, \Omega)\mathcal{L}_{ll'mm'}(\omega, \Omega) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

This equation is still exact. We will now carry through a number of approximations relevant to our problem. For small disorder, the vertex U is given by [30],

$$U_{nn'll'}(\omega, \Omega) = \langle \langle \Psi_n | \delta\mathbf{K} | \Psi_l \rangle \langle \Psi_{n'} | \delta\mathbf{K} | \Psi_{l'} \rangle \rangle. \quad (3.27)$$

For short-range correlations, as specified in Eqs. (3.18), the vertex U can be straightforwardly related to the cross-section $W(i\mathbf{k}_i, j\mathbf{k}_j)$ defined in Eq. (3.22). For typical wave packets $\Omega \ll \omega$ (i.e. a wave packet contains many cycles) so that we neglect Ω in any functional dependence on frequency (“slowly varying envelope approximation”). The index n consists of one discrete branch index j , and one index \mathbf{k} that becomes continuous as $A \rightarrow \infty$. The Q2DA neglects all overlaps between different branches, so that $\Delta G(\omega, \Omega)_{nn'} \rightarrow 2\pi i \delta_{jj'} \delta[\omega - \omega_j(\mathbf{k})]$. If we let $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{q}$, and $S_m(\omega)$ the source in mode

representation, a new observable quantity $L_{j\mathbf{k}}$ can be defined as

$$\sum_{mm'} \mathcal{L}_{nn'mm'}(\omega, \Omega) S_m S_{m'}^* \equiv 2\pi \delta[\omega - \omega_{j\mathbf{k}}] \delta_{jj'} \times L_{j\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega). \quad (3.28)$$

In space-time the Q2D transport equation reads,

$$\left[\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla + \frac{1}{\tau_{j\mathbf{k}_j}} \right] L_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = |S_{j\mathbf{k}}(\omega)|^2 \delta(t) \delta(\mathbf{x}) + \omega^2 \sum_{j'} \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{k}}_{j'}}{2\pi} n_{j'} W(j\mathbf{k}_j, j'\mathbf{k}_{j'}) L_{j'\mathbf{k}_{j'}}(\mathbf{x}, t). \quad (3.29)$$

We will use this equation as a starting point for our calculations. The equation is essentially two-dimensional, with a finite number of modes (of order $2H\omega/\beta$) to take care of the third, vertical dimension. The great advantage of this equation is that the boundary conditions of the elastic waves have been dealt with *exactly*, i.e. on the level of the wave equation, contrary to conventional transport equations [14, 15, 33]. We see that $L_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ can be interpreted as the *specific intensity* of the mode ($j\mathbf{k}_j$) at frequency ω , at horizontal position \mathbf{x} , at a time t after the release of energy by the source. The source term $S_{j\mathbf{k}}(\omega)$ is given by,

$$S_{j\mathbf{k}}(\omega) = \langle \Psi_{j\mathbf{k}} | \Psi_f \rangle = \omega \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{f}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{u}_{j\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (3.30)$$

Since $\mathbf{u}_{j\mathbf{k}}$ is an eigenfunction for which the energy (3.5) has been normalized, we see that $|S_{j\mathbf{k}}|^2$ has the dimension of energy. Since (Ω, \mathbf{q}) -dependence has been neglected in the source, it emerges in our transport equation as a $\delta(t)\delta(\mathbf{x})$ in space-time.

3.4.1 Equipartitioned solution

Equation (3.29) has one very important property that has been discussed in great detail in the literature. By recalling expression (3.21) for the extinction time, it follows immediately that the specific intensity with the property that its total mode energy

$$\int d^2 \mathbf{x} L_{j\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}, t) = \text{constant}, \quad (3.31)$$

independent of the mode-index j and independent of the horizontal direction of propagation \mathbf{k} , is a stationary solution for $t > 0$ of the transport equation. All solutions converge to this solution regardless the nature and position of the source. This implies that finally all modes have an equal share in the *total* energy contents of the plate. This phenomenon is called *equipartition* [22, 34, 35, 36, 37], and is believed to be a fundamental feature of the solution of transport equations at large lapse times, provided absorption is absent, or

at least small [38]. According to our definition (3.28), the total spectral energy per unit surface in the regime of equipartition is given by,

$$\begin{aligned} E_\omega(t) &= \sum_j \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{x} L_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) 2\pi\delta(\omega - \omega_{j\mathbf{k}}). \\ &\rightarrow \text{constant} \times \sum_j n_j. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4.2 Dynamics of the Equipartition Process

We will now introduce the spectral energy density $E_i(\mathbf{x}, t)$ of mode i per unit surface, and its current density $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t)$ according to,

$$E_i(\mathbf{x}, t) \equiv \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} 2\pi\delta(\omega - \omega_{i\mathbf{k}}) L_{i\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = n_i \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{2\pi} L_{i\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}, t), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} 2\pi\delta(\omega - \omega_{i\mathbf{k}}) \mathbf{v}_i L_{i\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = n_i \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{2\pi} \mathbf{v}_i L_{i\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}, t). \quad (3.34)$$

An exact equation of continuity can be found from Eq. (3.29) by integrating over \mathbf{k}_i ,

$$\partial_t E_i(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) = \left[n_i \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{2\pi} |S_{i\mathbf{k}_i}(\omega)|^2 \right] \delta(\mathbf{x})\delta(t) - \sum_j C_{ij} E_j(\mathbf{x}, t), \quad (3.35)$$

with the “mode-conversion matrix”,

$$C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\tau_i} - \omega^2 n_i \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}_j}{2\pi} W(i\mathbf{k}_i, j\mathbf{k}_j). \quad (3.36)$$

The mode-conversion matrix \mathbf{C} has an eigenvalue 0 with eigenvector $\{n_i\}$, associated with the equipartition. Its $N - 1$ nonzero eigenvalues, which can be called “Stokes parameters”, determine the dynamics of the equipartition process. The solution of Eq. (3.35) depends on the initial conditions, i.e. how the initial release of energy is distributed among the different modes, as described by $S_{i\mathbf{k}}(\omega)$.

Figure 3.3 shows all eigenvalues of the matrix \mathbf{C} in the case of a plate of thickness $H = 20.2\lambda_S$, for which the number of modes is $N = 106$. The disorder is uniform in the whole plate and the spatial correlation among all Lamé coefficients is chosen equal: $\sigma_\lambda^2 = \sigma_\mu^2 = \sigma_{\mu\lambda}^2$. The time scale has been normalized to the mean free time of S -waves in an the infinite medium, which has the same amount of disorder, i.e. as described by Eqs. (3.18).

The largest eigenvalue (associated with the shortest life-time) has an eigenvector made of the symmetric and antisymmetric Rayleigh modes. This configuration is very sensitive

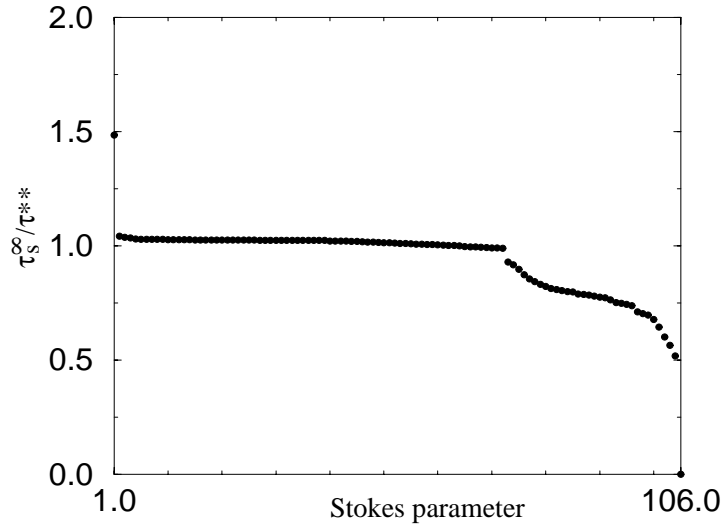


FIG. 3.3 - *Eigenvalues of the matrix \mathbf{C} defined in Eq. (3.36) in the case of a plate thickness $H = 20.2\lambda_s$ having a number of $N = 106$ modes normalized to the mean free time of S -waves in an infinite medium. The disorder is uniform in the whole plate and the spatial correlation between all Lamé coefficients is equal.*

to the location of the disorder in the plate. If the plate does not have any disorder close to the two free surfaces (at the length scale of a wavelength) the Rayleigh modes, which have a penetration length of the order a wavelength, do not suffer from the disorder. As a consequence, their life-time would become very large compared to the mean free time of S -waves in an infinite medium. On the other hand, if the disorder is localized close to the free surface, the Rayleigh modes end up with a very large eigenvalue. The eigenvectors associated with the flat plateau in Figure 3.3 consist of modes whose shear component strongly dominates over the compressional part. As a result their eigenvalues are very similar to the inverse shear mean free time of a S wave in an infinite medium. The eigenvectors associated with the eigenvalues smaller than unity exhibit a strong compressional component. They are associated with longer life times as shown in Figure 3.2. Quite logically they show up with a smaller eigenvalue (associated to a longer life-time) of the mode-conversion matrix \mathbf{C}

In the case of dominant μ correlation, $\sigma_\lambda^2 \ll \sigma_\mu^2$, the picture does not change drastically since Lamb modes are always dominated by shear. Only for dominant λ correlation, $\sigma_\lambda^2 \gg \sigma_\mu^2$, the structure of eigenmodes of the mode-conversion matrix \mathbf{C} is modified considerably. Eigenvalues that were previously associated with “bulk” P and S vectors now see their life-

time becoming much shorter. An eigenvector which had a small eigenvalue in Figure 3.3, now achieves a large eigenvalue.

Figures 3.4 show, for different kind of sources, how the initial release of energy is distributed among the different modes. Figure 3.4*a* shows an isotropic explosion at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. An explosion is a purely compressional source, and does not excite any *SH* modes. Among the Lamb modes it excites preferentially the modes that are “bulk” for both compressional and shear components as well as Rayleigh modes. A source at a larger depth will not excite the Rayleigh modes since they have a penetration length of the order of the wavelength.

Figure 3.4*b* applies for a double couple in the *xy* plane at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. Contrary to the isotropic explosion, a double couple in the *xy* plane strongly excites the *SH* modes. Since the source is close to the free surface Rayleigh modes are excited as well. The Lamb modes which are “bulk” for the shear component but only evanescent for the compressional component are also excited.

Figures 3.4*c, d* show the mode distribution for a double couple in the plane *xz* for two different depths of the source, $\lambda_s/3$ and $5\lambda_s$. When the source is located close to the free surface the majority of the energy is distributed among the Rayleigh modes. Two Rayleigh modes are out of scale in Figure 3.4*c* but carry in fact half of the released energy. When the source is situated deep in the plate the pattern becomes very rich, but one can see that the Rayleigh modes are not excited anymore.

3.5 Diffusion Approximation

Despite the many simplifications that have been carried out, the final transport equation (3.29) is still difficult to solve numerically. In future work, we intend to adapt our Monte-Carlo simulations, developed to solve the 3D radiative transfer equation [18, 19], to this modified equation. In this section we shall carry out a final and rather familiar simplification, that facilitates a numerical solution.

The diffusion approximation is typically valid at large lapse times, when currents start to become small. In that case, the specific intensity of mode *i* can be written as,

$$L_{i\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{n_i} \left[E_i(\mathbf{q}, \Omega) + \frac{2}{v_i^2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{q}, \Omega) + \dots \right], \quad (3.37)$$

with $n_i = k_i/v_i$ the density of mode *i* in phase space introduced earlier. In real space \mathbf{q} transforms into the 2D gradient ∇ . Inserting the series (3.37) into Eq. (3.29) leads to the

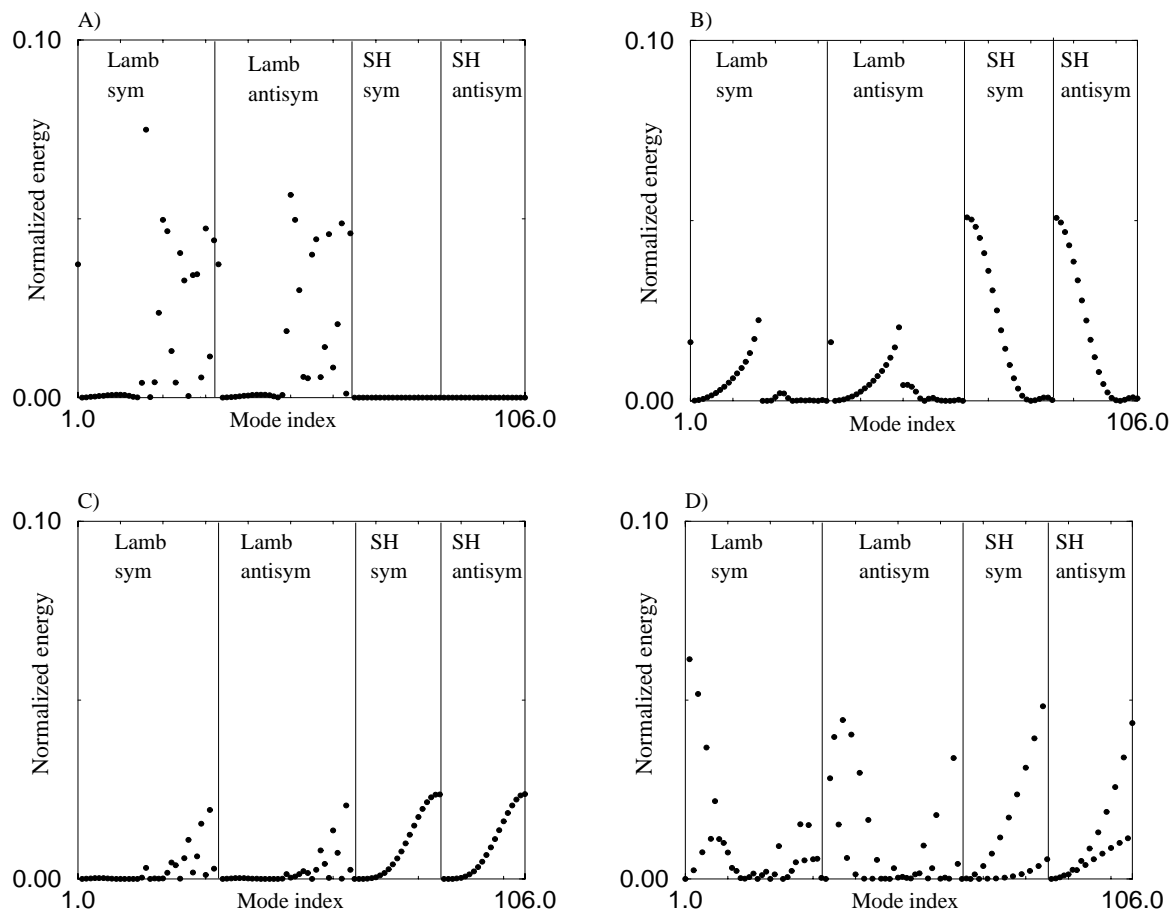


FIG. 3.4 - Energy distribution among the different modes for different sources. The total energy release is normalized to 1 and the plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$ with $N = 106$ modes. A) Isotropic explosion source at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. B) Double couple source in the xy plan at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. C) Double couple source in the xz plan at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. The two Rayleigh modes are out of scale and carry half of the released energy. D) Double couple source in the xz plan at a depth $5\lambda_s$ from the free surface.

relation

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) = - \sum_j D_{ij} \nabla E_j(\mathbf{x}, t). \quad (3.38)$$

This relation is recognized as a generalized Fick's Law [39], generalized, because it involves different individual modes at the cost of one dimension. The *diffusion matrix* is given by,

$$\left(\mathbf{D}^{-1}\right)_{ij} = 2 \left(\frac{\delta_{ij}}{v_i^2 \tau_i} - \frac{\omega^2}{n_j} \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{k}}_j}{2\pi} W(i\mathbf{k}_i, i\mathbf{k}_j) \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{v_i^2 v_j^2} \right), \quad (3.39)$$

It is easy to check the following relation,

$$\frac{D_{ij}}{D_{ji}} = \frac{n_i}{n_j}. \quad (3.40)$$

Combining Eqs. (3.38) and (3.35) and transforming back to space-time yields the generalized 2D diffusion equation,

$$\partial_t E_i(\mathbf{x}, t) - \sum_j D_{ij}(\omega) \Delta E_j(\mathbf{x}, t) = S_i(\omega) \delta(\mathbf{x}) \delta(t) - \sum_j C_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{x}, t), \quad (3.41)$$

where

$$S_i(\omega) = n_i \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{k}}}{2\pi} |S_{i\mathbf{k}}(\omega)|^2. \quad (3.42)$$

This diffusion equation is an ordinary partial differential equation that can be solved by conventional means. For an infinite plate no boundary conditions have to be specified: the boundary conditions at the two free surfaces have been taken care of exactly. For this reason, the Q2D diffusion approximation is not expected to break down near the boundaries, as was noticed by Turner and Weaver for the conventional diffusion approximation [15].

Equation (3.41) still captures the time-evolution of the different elastic modes of the plate, and can thus be used to study polarization properties. Integrating equation (3.41) over the horizontal coordinate \mathbf{r} gives for the time evolution of the total modal energy

$$\partial_t E_i(t) = S_i(\omega) \delta(t) - \sum_j C_{ij}(\omega) E_j(t). \quad (3.43)$$

In fact this equation follows directly from Eq. (3.35) without the need to apply the diffusion approximation. Its formal solution is $E_i(t) = \sum_j [\exp(-\mathbf{C}t)]_{ij} S_j(\omega) \theta(t)$. This can easily be evaluated using the complete set of eigenmodes of \mathbf{C} .

Figure 3.5a shows the time evolution of the energy among the different modes for an isotropic explosion at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface. The initial modal energy distribution was shown in Figure 3.4a. For the sake a clarity we only display the evolution of

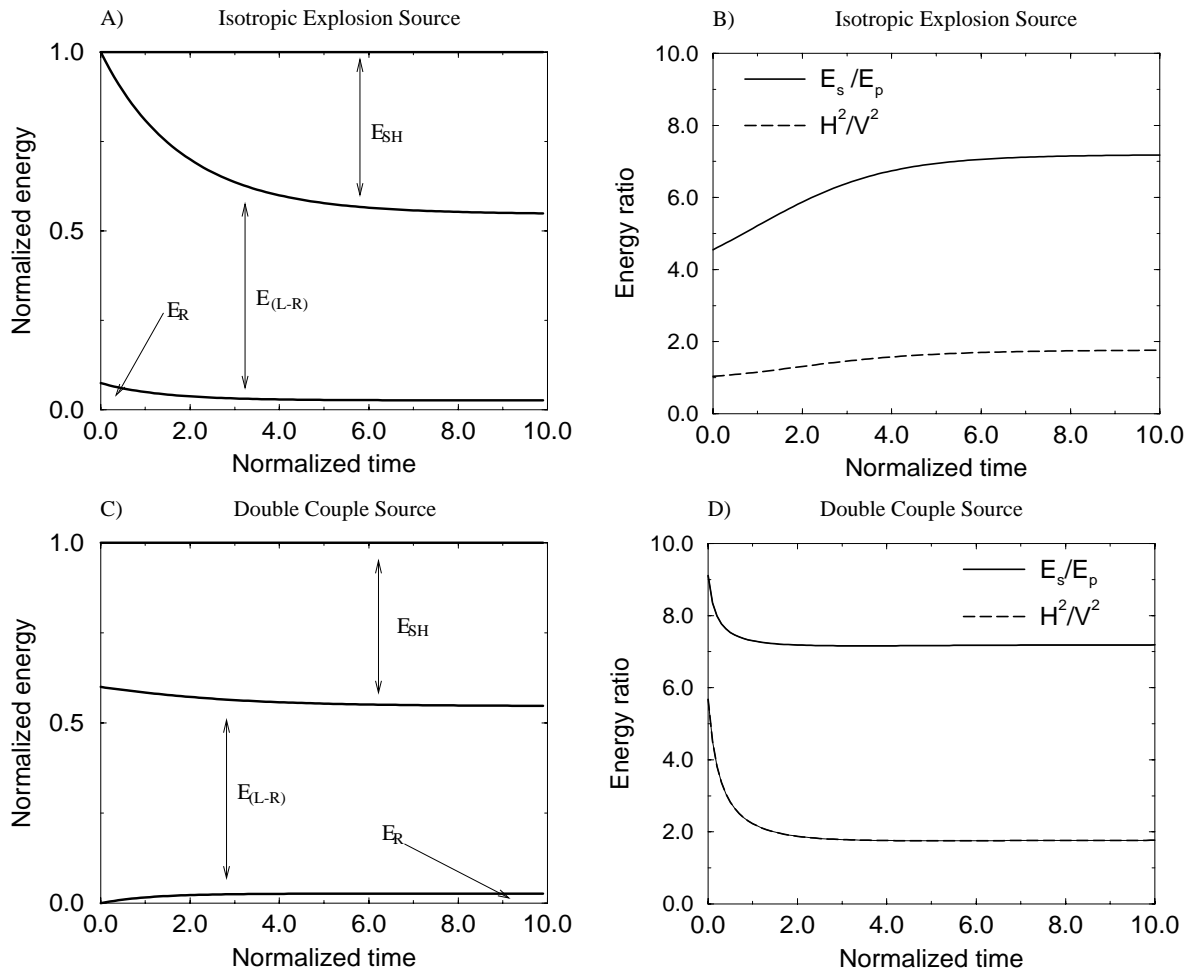


FIG. 3.5 - Prediction of the diffusion equation (3.43) for the time evolution of the energy for different sources. The time scale has been normalized to the mean free time of the S waves in an infinite medium. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$, with $N = 106$ modes. A) and C) are predictions for the evolution of the energy for different modes, SH modes (E_{SH}), Lamb modes without the Rayleigh modes ($E_{(L-R)}$), and Rayleigh modes alone (E_R) for respectively an isotropic explosion at a depth $\lambda_s/3$ from the free surface and a double couple source in the xz plan at depth $5\lambda_s$ from the free surface. B) and D) are predictions for the potential energy ratio E_s/E_p and the ratio H^2/V^2 of the kinetic energies for the elastic displacement in different directions.

three sub-classes of modes (Rayleigh, Lamb, SH) and not the whole distribution. Rayleigh modes are excited but not SH modes since the source is purely compressional. As time goes on, the mode occupation changes as a result of the dynamics of the equipartition process and finally tends to the equipartitioned distribution which does not depend on nature and location of the source.

Figure 3.5*b* shows the time evolution of two “observable” energy ratios measured at the free surface: the ratio of shear to compressional potential energy, E_s/E_p , and the one of the horizontal to vertical kinetic energy H^2/V^2 . After a few shear wave mean free times, the energy ratios stabilize at their predicted equipartition value $E_s/E_p = 7.19$, $H^2/V^2 = 1.77$ [22]. The ratios E_s/E_p and H^2/V^2 increase monotonically which is due to the compressional nature of the source.

Figures 3.5*c*, *d* present the equipartition process for a double couple source deep in the plate ($5\lambda_s$ from the free surface). For such a source the Rayleigh modes are not excited while the other Lamb modes and SH modes are strongly excited (see Figure 3.4*d*). The initial ratio of shear to compressional energy at the free surface is higher than the one for the explosion source due to the shear nature of the source. However, in both cases the energy distributions converge towards an equipartitioned distribution which is independent of the nature of the source and its location. Note that, for an exploding source, the equipartition process takes much longer a time, typically $6\tau_s^\infty$. For the double-couple source in Figures 3.5*c*, *d* it is typically τ_s^∞ .

It is not very difficult to show that in the equipartition regime, the generalized diffusion equation (3.41) further simplifies to a genuine 2D diffusion equation for the total energy density,

$$\partial_t E(\mathbf{x}, t) - D(\omega)\Delta E(\mathbf{x}, t) = S(\omega)\delta(\mathbf{x})\delta(t), \quad (3.44)$$

with diffusion constant,

$$D(\omega) = \frac{\sum_{ij} D_{ij}(\omega)n_j(\omega)}{\sum_j n_j(\omega)}, \quad (3.45)$$

and source,

$$S(\omega) = \sum_i S_i(\omega). \quad (3.46)$$

Equation (3.45) is recognized as an equipartitioned sum of all diffusion matrix elements. A similar result was obtained for the diffusion constant in an infinite elastic medium, in terms of the individual matrix elements for P and S waves [13, 37, 40]. Equation (3.44) has the simple solution,

$$E(\omega, \mathbf{x}, t) = \frac{S(\omega)}{4\pi D(\omega)t} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4D(\omega)t}\right), \quad (3.47)$$

$N(\omega)$	3	5	13	23	43	65	85	106
$\frac{D(\omega)}{D^\infty(\omega)}$	0.72	0.56	0.72	0.77	0.82	0.84	0.85	0.85

TAB. 3.1 - Ratio $D(\omega)/D^\infty(\omega)$ as a function of the number of modes $N(\omega)$ in the plate. $D^\infty(\omega)$ is the frequency-dependent diffusion constant for a 3D infinite medium, $D(\omega)$ is the frequency-dependent diffusion coefficient for our quasi-2D model with $N(\omega)$ modes, with the same kind of disorder in λ and μ .

i.e. the local energy basically varies at $\mathbf{x} = 0$ as $E(\omega) \sim t^{-1} \times S(\omega)/D(\omega)$ at large times.

Table 3.1 shows the evolution of the ratio $D(\omega)/D^\infty(\omega)$ as a function of the number of modes in the plate. $D^\infty(\omega)$ is the elastic diffusion constant for an infinite medium, obtained by Weaver [13] and Ryzhik [24], with the same amount of disorder, *i.e.*, as was described by Eqs. (3.18). The ratio varies slowly from 0.72 for $N = 3$ modes to 0.85 for a thick plate, *i.e.* $H \approx l^*$. Our quasi-2D approximation starts to break down when the thickness of the plate exceeds the mean free path.

3.6 Coherent Backscattering near the Free Surface

Coherent backscattering of waves is an interference effect that survives multiple scattering. It refers to a coherent enhancement of intensity near the source [40]. The effect has recently been observed with acoustic [41, 42] and elastic waves [23, 43].

We recently investigated coherent backscattering of waves in a more seismic context [44, 45]. Specific aspects such as symmetry of the source, near field, leakage and the exact measurement process have to be understood before any seismic experiment can be considered. Our analyses so far have been done either with scalar (acoustic) waves in a disordered plate with leakage [44] or with fully elastic waves in an infinite medium [45]. The last study established that the enhancement factor of coherent backscattering is highly dependent on both the nature of the source and on the precise parameter that is being measured. More specifically, a measurement of simply $\langle u_i(\omega)^2 \rangle$ of waves released by a “double-couple” source will hardly give rise to a coherent enhancement, so that observation is unlikely. On the other hand, the measurement of $\langle \text{div } \mathbf{u}(\omega)^2 \rangle$ of waves released by an explosion source maps exactly onto the acoustic problem, which has the maximal enhancement factor of 2.

Both approaches are unable to model the coherent backscattering effect of wave propagation in the crust, whose elastic eigenmodes are not plane waves. In addition, a mea-

surement necessarily takes place at the Earth surface, whereas the source (an earthquake or explosion) can be located at depth. In this section we will investigate coherent backscattering using our Quasi 2D transport model. Recently, De Rosny *et al* [23] and Weaver *et al* [43] reported the studies of coherent backscattering of elastic waves at frequencies around 1 MHz.

Our analysis will closely follow the one given in Ref. [45]. Starting point is the calculation of the vertex $L_{nn'mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$ defined in Eq. (3.28) and describing the ensemble-averaged, incoherent scattering of the modes $(i, \mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{q})$ and $(i', \mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{q})$ into $(j, \mathbf{k}' + \frac{1}{2}\mathbf{q})$ and $(j', \mathbf{k}' - \frac{1}{2}\mathbf{q})$. By the reciprocity principle this object must be symmetrical with respect to left and right-hand indices. The diffusion approximation, applied to our Q2DA model yields for large lapse times,

$$L_{ii'jj'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \frac{\delta_{ii'}\delta(\omega - \omega_{i\mathbf{k}})\delta_{jj'}\delta(\omega - \omega_{j\mathbf{k}'})}{-i\Omega + D\mathbf{q}^2 + \omega/Q}. \quad (3.48)$$

An inverse Fourier transform with respect to Ω provides the time-dependence of the envelope of a wave packet with central frequency ω^1 . Similarly, the spatial dependence is obtained by an inverse Fourier transform over \mathbf{q} , \mathbf{k} and \mathbf{k}' . The result is,

$$L_{ii'jj'}(\omega, t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \delta_{ii'}\delta_{jj'} n_i n_j J_0(k_i x_{12}) J_0(k_j x_{34}). \quad (3.49)$$

The depth (i.e. z) dependence can be obtained by summing over the N eigenfunctions $\Psi_i(z)$ at frequency ω . The coherent backscattering is due to constructive interference of time-reversed waves. It can be constructed straightforwardly by interchanging the indices $(i'\mathbf{x}_2)$ and $(j'\mathbf{x}_4)$ [45],

$$C_{ii'jj'}(\omega, t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \delta_{ij'}\delta_{ji'} n_i n_j J_0(k_i x_{14}) J_0(k_j x_{32}). \quad (3.50)$$

Both L and C contribute to $\langle G(i, \mathbf{x}_1 \rightarrow j, \mathbf{x}_2)G^*(i', \mathbf{x}_3 \rightarrow j', \mathbf{x}_4) \rangle$, but C survives only close to the source, as we shall see. To calculate actual enhancement factors, we must specify source and detector. In Eq. (3.30) the source was already expressed in terms of the eigenmodes (j, \mathbf{k}) . Different sources will now be considered.

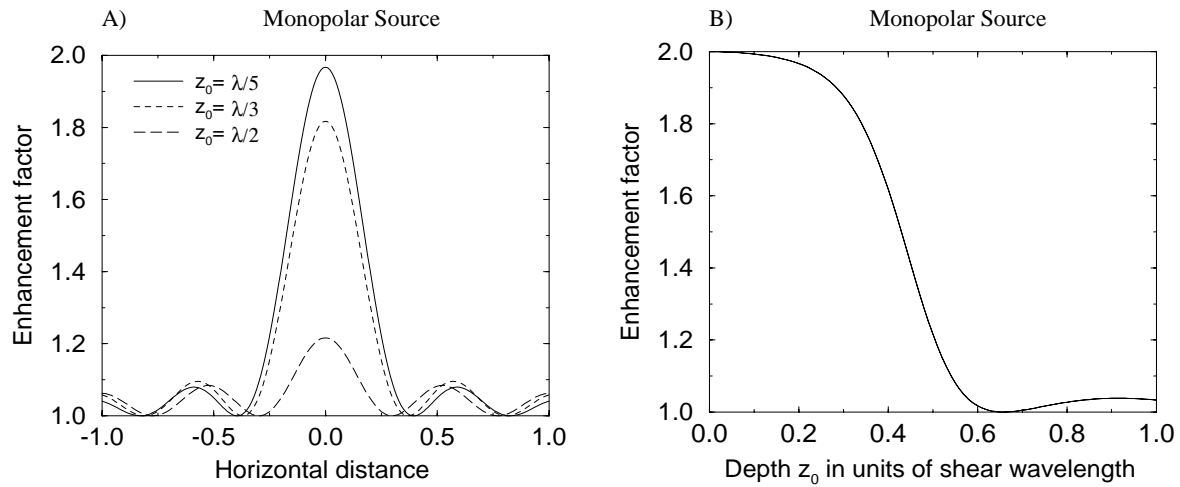


FIG. 3.6 - Plot of the backscattering cone and enhancement factor for a monopolar source along the z axis. The normal component of the displacement field $u_z(0)$ is measured at the free surface and the plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$ which has $N = 106$ modes. A) Plot of the backscattering cone for different depths z_0 . B) Plot of the enhancement factor at $x = 0$ as a function of the source depth z_0 .

3.6.1 Monopolar source at depth

We consider the source $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{f}_0(\omega)\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, which represents a highly directional force field at position \mathbf{r}_0 , small compared to the wavelength. Equation (3.30) gives $S_{j\mathbf{k}}(\omega) \sim \omega \mathbf{f}_0(\omega) \cdot \mathbf{u}_{j\mathbf{k}_j}(z_0)$ with z_0 the depth of the source. To simplify the analysis we will assume that the force is directed into the z -direction. This configuration was also studied by De Rosny et al. [23, 46] using a thin chaotic 2D silicon cavity, with only 3 excited Lamb waves. In addition, their detection method of heterodyne laser interferometry is only sensitive to the normal displacement $u_z(z = 0)$. In seismology, the force field above may be a simple model for a volcano eruption.

Let \mathbf{x} be the horizontal distance between source and detector. The measured “incoherent” background is found from Eq. (3.49),

$$L(x, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} f_0(\omega)^2 \sum_i n_i |u_{i,z}(0)|^2 \sum_j n_j |u_{j,z}(z_0)|^2, \quad (3.51)$$

1. Seismic measurements usually have access to time-correlations $\langle \psi_j(t - \frac{1}{2}\tau) \psi_j^*(t + \frac{1}{2}\tau) \rangle$ of different components of the wave function (3.7). The smooth time-dependence of the envelope of the pulse at frequency ω can be obtained by Fourier transforming this object with respect to τ . Signal-to-noise can usually be increased by averaging over a time window Δt and using a finite bandwidth $\Delta\omega$ over which the signal is not expected to vary too much.

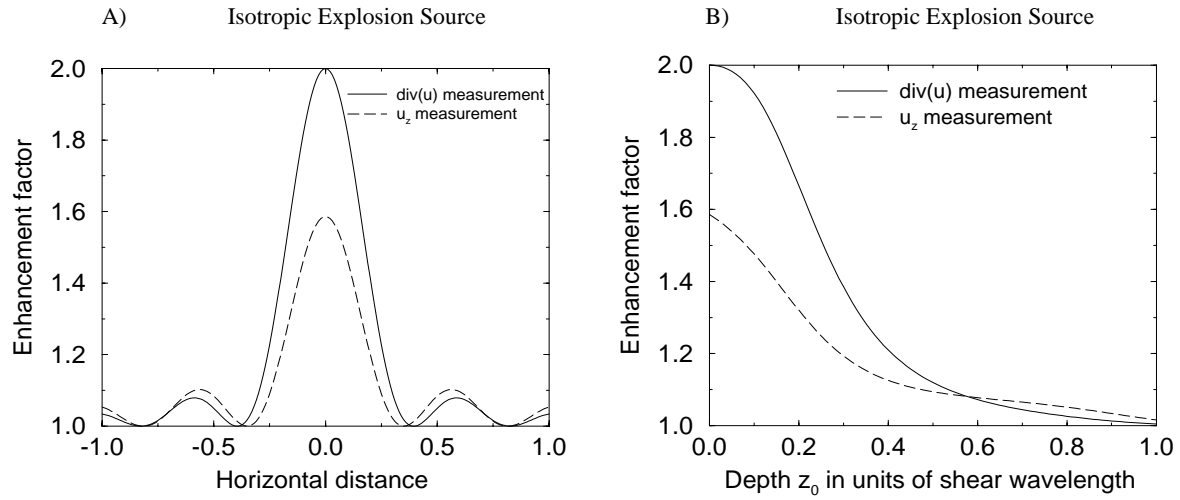


FIG. 3.7 - Plot of the backscattering cone and enhancement factor for a isotropic explosion source. Both the divergence (solid line) and normal component of the field (dashed line) are measured. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$ which has $N = 106$ modes. A) Plot of the backscattering cone. B) Plot of the enhancement factor at $x = 0$ as a function of the source depth z_0 .

which is independent of \mathbf{x} , but still depends on the depth z_0 of the source. The "coherent" contribution follows from Eq. (3.50)

$$C(x, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} f_0(\omega)^2 \left| \sum_i n_i u_{i,z}(0) u_{i,z}(z_0)^* J_0(k_i x) \right|^2. \quad (3.52)$$

As was already mentioned in previous work, the ratio $(L + C)/L$, the so-called "enhancement factor", is independent of time at large lapse times [44]. An application of Cauchy's inequality shows that $(L + C)/L \leq 2$, with equality *if and only if* $x = 0$ and if $u_{i,z}(0) = u_{i,z}(z_0)$ for all modes i . This can only be true if $z_0 = 0$ i.e. the source must be near the surface. In practice, to produce any measurable enhancement factor, the source must be at a depth less than the typical wavelength, as shown in Figures 3.6a and 3.6b. A source with a force direction different from normal will have a lower enhancement as well. Note that the enhancement is symmetric in azimuth around the source.

3.6.2 Isotropic Explosion

An isotropic explosion at depth z_0 is described by the force field $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \omega) = B(\omega)\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ [17]. It can easily be shown that $S_{i\mathbf{k}}(\omega) = -B(\omega)\omega \text{div } \mathbf{u}_{i\mathbf{k}}(\omega)$. For a fixed frequency

this depends on the mode label i but, very conveniently, not on the direction $\hat{\mathbf{k}}$ of horizontal propagation.

Let us first suppose that we measure the normal component of the displacement vector at the surface. Incoherent background and coherent enhancement are given by,

$$\begin{aligned} L(x, t) &\sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} B(\omega)^2 \sum_i n_i |u_{i,z}(0)|^2 \sum_j n_j |\operatorname{div} \mathbf{u}_j(z_0)|^2, \\ C(x, t) &\sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} B(\omega)^2 \left| \sum_i n_i u_{i,z}(0) \operatorname{div} \mathbf{u}_i(z_0)^* J_0(k_i x) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

The resulting enhancement factor $(L + C)/L$ is plotted in dashed lines in Figure 3.7a as a function of the horizontal distance, and in Figure 3.7b for a measurement on top of an explosion source as a function of the depth z_0 . Note that the enhancement never reaches its maximum value 2, not even when $z_0 = 0$. In an infinite medium, a measurement of any component of the displacement vector of waves released by an explosion source would have had no enhancement at all near the source [45]. Here, the finite enhancement is due to the nearness of a free surface.

The enhancement factor can be restored by a measurement of the dilatation ($\operatorname{div} \mathbf{u}$) in which case,

$$\begin{aligned} L(x, t) &\sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} B(\omega)^2 \sum_i n_i |\operatorname{div} \mathbf{u}_i(0)|^2 \sum_j n_j |\operatorname{div} \mathbf{u}_j(z_0)|^2, \\ C(x, t) &\sim B(\omega)^2 \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \left| \sum_i n_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i(0) \operatorname{div} \mathbf{u}_i(z_0)^* J_0(k_i x) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A measurement of the dilatation restores the symmetry between detector and source, and reveals the maximum enhancement factor 2 when the detector is located close to the source as shown in solid lines in Figures 3.7a, b.

3.6.3 Dipolar Source

We next consider a single couple at the surface with normal displacement vector, and axis along the x -axis. This source can be represented by the dipole $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \sim d(\omega) \hat{\mathbf{z}} \partial_x \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Such a source can be generated with laser interferometry on an elastic plate, and the resulting coherent backscattering effect was recently studied experimentally by De Rosny et al. [46].

The spatial derivative in the source finds its way in the Bessel functions, in the same way as was done in earlier work for the infinite system [45]. We derive, again for a mea-

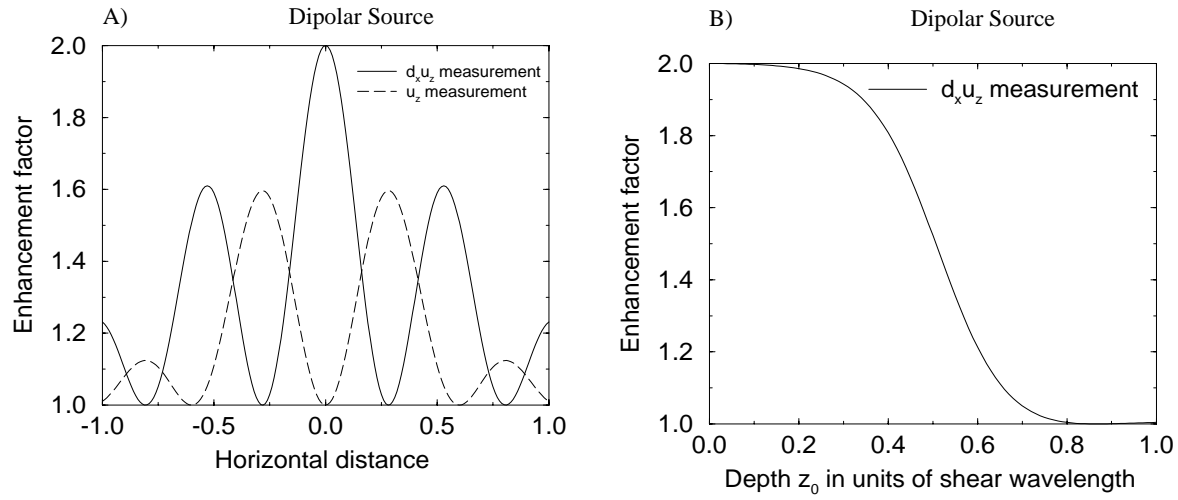


FIG. 3.8 - Plot of the backscattering cone and enhancement factor for a dipolar source. Both $\partial_x u_z(\mathbf{r}, t)$ (solid line) and normal component $u_z(\mathbf{r}, t)$ of the field (dashed line) are measured. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$ which has $N = 106$ modes. A) Plot of the backscattering cone. B) Plot of the enhancement factor at $x = 0$ as a function of the source depth z_0 .

surement of the displacement vector in the direction normal to the surface,

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{x}, t) &\sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \frac{1}{2} d(\omega)^2 \sum_i n_i |u_{i,z}(0)|^2 \sum_j n_j |u_{j,z}(z_0)|^2 k_j^2, \\
 C(\mathbf{x}, t) &\sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \cos^2 \phi d(\omega)^2 \left| \sum_i n_i k_i u_{i,z}(0) u_{i,z}(z_0)^* J_1(k_i x) \right|^2. \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Two things can be noted. First, C vanishes anywhere above the source, ($\mathbf{x} = 0$). The enhancement is destroyed because the dipolar nature of the source is in some sense “orthogonal” to the detection of the displacement vector. Maximum enhancement actually occurs a fraction of a wavelength away from the source as shown in dashed line in Figure 3.8a. Secondly, the coherent enhancement around the source has a $\cos^2 \phi$ structure, with ϕ the azimuthal angle between the dipole-axis of the source and the direction of detection. This “double-well” structure was observed by De Rosny, Tourin and Fink [46].

The coherent enhancement factor can be restored by a modification of the measurement. Suppose we measure the parameter $\partial_x u_z(\mathbf{r}, t)$. This measurement has the same symmetry as the dipolar source. We find for background and coherent enhancement,

$$L(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \frac{1}{4} d(\omega)^2 \sum_i n_i k_i^2 |u_{i,z}(0)|^2 \sum_j n_j k_j^2 |u_{j,z}(0)|^2,$$

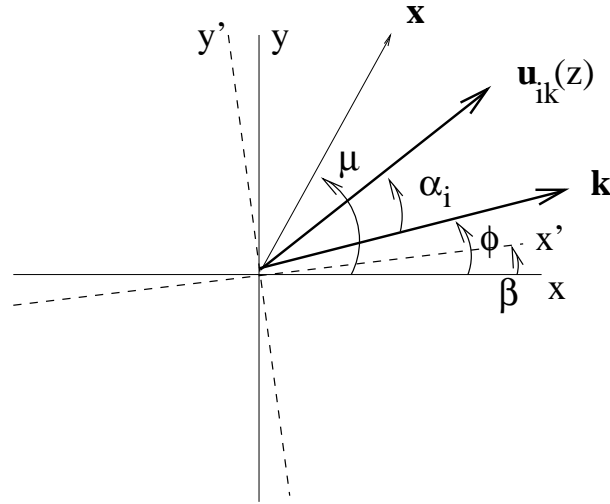


FIG. 3.9 - All angles involved in the measurement of the backscattering cone of a dislocation source at depth z_0 . See text for discussion, $\alpha_i = 0$ for Lamb waves and $\alpha_i = \pi/2$ for *SH* waves.

$$C(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \times d(\omega)^2 \left| \sum_i n_i k_i^2 u_{i,z}(0) u_{i,z}(z_0)^* \left[\frac{J_1(k_i x)}{k_i x} - J_2(k_i x) \cos^2 \phi \right] \right|^2. \quad (3.56)$$

For $x = 0$ and $z_0 = 0$ we infer that $L = C$, i.e the maximal enhancement can now be reached. The plot of the restored enhancement factor as the function of the horizontal distance and as the function of the source depth are shown in solid line in the Figures 3.8*a, b*. Note that the line profile is still not cylindrically symmetric, but depends on ϕ .

3.6.4 Double-couple source at depth

Seismic sources have successfully been modeled as two compensating couples (dipoles) [16]. To facilitate observation of coherent backscattering with seismic waves we will here obtain the enhancement expected for such a source close to a free surface. In view of the complexity of the problem, we will restrict ourselves to a seismic plane that is oriented parallel to the free surface where detection takes place. The depth of this plane is located at z_0 .

The force field of a double-couple source is described by a symmetric, off-diagonal seismic tensor. We assume that the two dipoles are orthogonal and along the axes x and

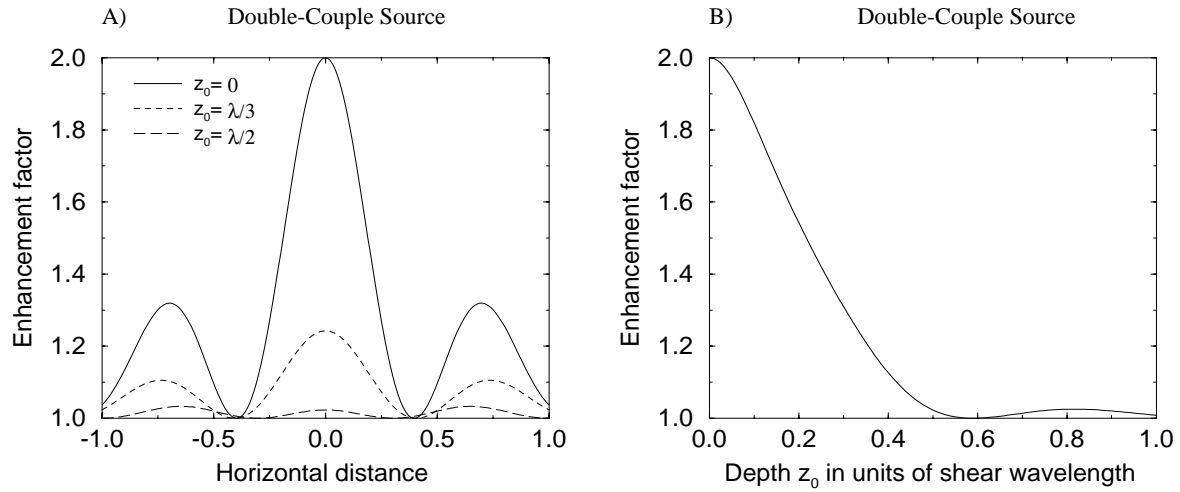


FIG. 3.10 - Plot of the backscattering cone and enhancement factor for a double-couple source with both its axes along the free surface. The orientation of the detection is such that $\beta = 0$ and $\mu = 0$. The plate thickness is $H = 20.2\lambda_s$ which has $N = 106$ modes. A) Plot of the backscattering cone for different source depths $z_0 = 0$, $z_0 = \lambda_s/3$ and $z_0 = \lambda_s/2$. B) Plot of the enhancement factor at $x = 0$ as a function of the source depth z_0 .

y . The force field is then given by,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \omega) = M(\omega) (\hat{\mathbf{x}}\partial_y + \hat{\mathbf{y}}\partial_x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.57)$$

with $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$. We can easily check that the mode representation of the source (3.30) is $S_{i,\mathbf{k}} = \omega M(\omega) [k_x u_{i,y}(z_0) + k_y u_{i,x}(z_0)]$. We will assume that the measured parameter is $\partial_{y'} u_{x'} + \partial_{x'} u_{y'}$, i.e. a certain horizontal component of the stress tensor; (x', y') are the coordinates in a frame that has been rotated over an angle β with (x, y) (see Figure 3.9). The displacement vector of a mode $(i\mathbf{k})$ can be expressed as,

$$\mathbf{u}_{i\mathbf{k}}(z) = \left\{ u_{i,z}(z) \hat{\mathbf{z}} + u_{i,\parallel}(z) \left[\cos \alpha_i \hat{\mathbf{k}} + \sin \alpha_i \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} \right] \right\} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (3.58)$$

which introduces a new angle α_i independent on the direction \mathbf{k} of propagation and on depth. Lamb waves have $\alpha_i = 0$ whereas SH-waves have $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$. We define ϕ as the angle between \mathbf{k} and the x -axis, i.e. $\hat{\mathbf{k}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$. Finally, the angle μ orientates the direction of measurement \mathbf{x} in the horizontal plane with respect to the source. (see Figure 3.9).

The incoherent background is calculated from,

$$L(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} M(\omega)^2 \sum_i \int d^3\mathbf{k} [\partial_{x'} u_{i\mathbf{k},y'}(0) + \partial_{y'} u_{i\mathbf{k},x'}(0)]^2 \text{Im} G_{i\mathbf{k}}(\omega)$$

$$\times \sum_j \int d^3\mathbf{k}' [\partial_x u_{j\mathbf{k}',y}(\mathbf{r}_0) + \partial_y u_{j\mathbf{k}',x}(\mathbf{r}_0)]^2 \text{Im} G_{j\mathbf{k}'}(\omega), \quad (3.59)$$

whereas the coherent enhancement follows from,

$$C(\mathbf{x}, t) = \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} M(\omega)^2 \times \quad (3.60)$$

$$\left| \sum_i \int d^3\mathbf{k} [\partial_{x'} u_{i\mathbf{k},y'}(\mathbf{0}) + \partial_{y'} u_{i\mathbf{k},x'}(\mathbf{0})] [\partial_x u_{i\mathbf{k},y}(\mathbf{r}_0) + \partial_y u_{i\mathbf{k},x}(\mathbf{r}_0)] \text{Im} G_{i\mathbf{k}}(\omega) \right|^2.$$

These \mathbf{k} -integrals can be evaluated straightforwardly and we simply quote the final result,

$$L(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \frac{1}{4} M(\omega)^2 \sum_i n_i k_i^2 |u_{i,\parallel}(0)|^2 \sum_j n_j k_j^2 |u_{j,\parallel}(z_0)|^2. \quad (3.61)$$

Here, u_{\parallel} denotes the complex amplitude of the horizontal component of the displacement vector. The coherent part is,

$$C(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\exp(-\omega t/Q)}{Dt} \frac{1}{4} M(\omega)^2 \times$$

$$\left| \sum_i n_i k_i^2 u_{i,\parallel}(0) u_{i,\parallel}(z_0)^* [\cos \beta J_0(k_i x) - \cos q_i J_4(k_i x)] \right|^2. \quad (3.62)$$

with $q_i = 4\mu + 3\beta$ for Lamb waves and $q_i = 4\mu + 3\beta + \pi$ for *SH* waves. Since the J_4 term is very small, the line profile is almost isotropic around $x = 0$, independent on μ , and maximal for $\beta = 0$. The enhancement factor $(L + C)/L$ is plotted in Figure 3.10a as a function of the horizontal distance for different source depth and in Figure 3.10b as a function of the source depth z_0 for a measurement on the top of the source. It is interesting to notice the relatively large second maximum of the coherent backscattering for a source at $x = 0.7\lambda_s$ away from the detector ($x \approx 1.2$ km).

3.7 Conclusions and Outlook

In this paper we have investigated multiple scattering of elastic waves for a model that is adapted to the needs of seismology of the Earth's crust: a two-dimensional solid plate with a thickness that is less than the mean free path of the waves. Contrary to other approaches, this model facilitates an exact treatment of the boundary condition at both sides of the plate, *i.e.* on the level of the elastic waves equation, and allows for fluctuations in the elastic constants that are depth-dependent. At the same time, we can describe the horizontal transport of waves, as well as the inter-mode mixing, by a generalized radiative transfer equation, that can be solved with conventional methods. Using this equation, we

have investigated different aspects, such as surface detection, mode extinction times, equipartition, polarized sources at different depths in the plate and coherent backscattering. We believe that this study is an important step in the modelisation of seismic waves in the Earth's crust, but it may also find applications in laboratory experiments with elastic waves. In future studies we will try to solve our equation numerically using Monte-Carlo methods.

One final limitation of the present model has to be looked at in more detail. In this paper we have assumed a solid plate bounded by two ideal free surfaces without any leaks. The Earth's crust is better described by one top free surface and a solid-solid interface at 30km in depth (the so-called Moho) overlying a homogeneous high-velocity mantle. In previous studies we already suggested that the resulting energy leak into the mantle may be the origin of seismic coda [18, 19]. A future study should establish the relation between seismic coda and the individual quality factors of the modes.

Acknowledgment

We are indebted to Michel Campillo, Ludovic Margerin, Renaud Hennino and Celine Lacombe for many constructive discussions. This work was supported by the Groupement De Recherche "PRIMA" of the French CNRS.

Bibliographie

- [1] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover, New York, 1960.
- [2] G. Papanicolaou, editor. *Wave Propagation in Complex Media*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] J.P. Fouque, editor. *Diffuse Waves in Complex Media*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [4] C. Soukoulis, editor. *Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century*. Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [5] B. van Tiggelen et H. Stark. Nematic liquid crystals as a new challenge for radiative transfer. *Rev. Mod. Phys.*, 72(4):1017, 2000.
- [6] M. Fink. Time reversal in acoustics. *Contemporary Physics*, 37(2):95, 1996.
- [7] P. Sebbah, editor. *Waves and Imaging through Complex Media*. Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [8] D. Thouless. A relation between the density of states and range of localization for one dimensional random systems. *J. Phys. C: Solid State Phys*, 5:77, 1972.
- [9] L. Ye G. Cody M. Zhou et P. Sheng. Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3080, 1992.
- [10] R. Dalichaouch J. Armstrong S. Schultz P. Platzmann et S. McCall. Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature*, 354:53, 1991.
- [11] A. Tourin Ph. Roux A. Derode B. van Tiggelen et M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3637, 1997.

- [12] S. Hirsekorn. The scattering of ultrasonic waves by multiphase polycrystals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83:1231, 1988.
- [13] R. Weaver. Diffusivity of ultrasound in polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.*, 38:55, 1990.
- [14] J. Turner et R. Weaver. Radiative transfer of ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3654, 1994.
- [15] J. Turner et R. Weaver. Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:3675, 1994.
- [16] K. Aki et P. Richards. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Freeman, San Francisco, 1975.
- [17] T. Lay et T. Wallace. *Modern Global Seismology*. Academic Press, San Diego, 1995.
- [18] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q . *Geophys. J. Int.*, 134:596, 1998.
- [19] L. Margerin M. Campillo N. Shapiro et B. van Tiggelen. Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in Mexico. *Geophys. J. Int.*, 138:343, 1999.
- [20] K. Aki. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geoph. Res.*, 74:615, 1969.
- [21] K. Aki et B. Chouet. Origin of coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *J. Geoph. Res.*, 80:3322, 1975.
- [22] R. Hennino N. Trégourès N. Shapiro L. Margerin M. Campillo B. van Tiggelen et R. Weaver. Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3447, 2001.
- [23] J. de Rosny A. Tourin et M. Fink. Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1693, 2000.
- [24] L. Ryzhik G. Papanicolaou et J. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, 24:327, 1996.
- [25] P. Morse et H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.

- [26] N. Shapiro M. Campillo L. Margerin S. Singh V. Kostoglodov et J. Pacheco. The energy partitioning between P and S waves and the diffusive character of the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90:655, 2000.
- [27] R. Weaver. Diffuse waves in finite plates. *J. Sound and Vib.*, 94:319, 1984.
- [28] R. Weaver et Yih-Hsing Pao. Axisymmetric elastic waves excited by a point source in a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 49:821, 1982.
- [29] P. Sheng. *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*. Academic, San Diego, 1995.
- [30] U. Frisch. *Probabilistic methods in applied mathematics*, page 75. Academic, New-York, 1968.
- [31] B. van Tiggelen et A. Lagendijk. Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.*, 270:143, 1996.
- [32] H. Sato et M. Fehler. *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*. Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [33] G. Papanicolaou L. Ryzhik et L. Keller. Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, page 1107, 1996.
- [34] G. Papanicolaou L. Ryzhik et J. Keller. Erratum to: Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 86:1107, 1996.
- [35] R. Weaver. On diffuse waves in solid media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71:1908, 1982.
- [36] R. Weaver. Diffuse elastic waves at a free surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78:131, 1985.
- [37] J. Turner. Scattering and diffusion of seismic waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88:276, 1998.
- [38] L. Margerin B. van Tiggelen et M. Campillo. Effect of absorption on energy equipartition of elastic waves in the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, to appear, 2001.
- [39] A. Fick. *Annln. Phys.*, 170:59, 1855.
- [40] Research group POAN. *New Aspects of Electromagnetic and Acoustic Wave Diffusion*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

- [41] G. Bayer et T. Niederdränk. Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett*, 70:3884, 1993.
- [42] K. Sakai K. Yamamoto et K. Takagi. Observation of acoustic coherent backscattering. *Phys. Rev. B*, 56:10930, 1997.
- [43] R. Weaver et O. Lobkis. Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4942, 2000.
- [44] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Coherent backscattering of acoustic waves in the near field. *Geoph. J. Int.*, to appear, 2001.
- [45] B. van Tiggelen L. Margerin et M. Campillo. Coherent backscattering of elastic waves: Role of source, polarization and near field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110:1291, 2001.
- [46] J. de Rosny. *Milieux Réverbérants et Réversibilité*. PhD thesis, University Paris 6, 2000.

Chapitre 4

Observation de l'équipartition des ondes sismiques

Observation of Equipartition of Seismic Waves

R. Hennino, N. Trégourès, N.M. Shapiro,

L. Margerin, M. Campillo, B.A. van Tiggelen et R. L. Weaver

Article publié dans le Physical Review Letters **86**, 3447, 2001.

Abstract Equipartition is a first principle in wave transport, based on the tendency of multiple scattering to homogenize phase space. We report observations of this principle for seismic waves created by earthquakes in Mexico. We find qualitative agreement with an equipartition model that accounts for mode conversions at the Earth surface.

Scattering of classical waves in controlled laboratory experiments has extended our knowledge of wave propagation considerably [1, 2, 3]. One new challenge is to apply this knowledge to waves in natural environments, whose properties are complex and not well known, for example medical imaging [4], remote sensing [5] and seismology.

The seismic case is particularly difficult because several specific complications, such as near-field detection and mode-conversions at the Earth surface, rule out the application of methods developed in optics and acoustics. In addition, seismic records are intrinsically time-resolved. Sheng *et al* [6, 7] considered the possibility of Anderson localization in time-dependent signals that have propagated through a layered Earth crust.

The seismic coda refers to the pronounced exponential time tail observed in the seismograms of regional earthquakes in the frequency band 1-10 Hz, reaching the level of seismic noise after sometimes more than ten times the travel time of direct waves [8]. One important observational fact is that the time decay coefficient of the energy in the seismic coda, the so-called coda Q factor, is a regional constant [9], dependent on frequency, but independent of distance, depth and magnitude of the seismic source.

Many studies have made an attempt to relate physical properties of the Earth lithosphere to the observed regional seismic coda. The first pioneering studies by Aki and Chouet [8, 9], followed by others [10, 11], interpreted seismic coda as elastic waves that are singly scattered from inhomogeneities in the Earth's crust. It was shown that a combination of single scattering and dissipation can account for some aspects of the seismic coda [12]. Recent numerical studies suggested multiple scattering as the origin of seismic coda [13, 14, 15, 16, 17]. Our own study estimated mean free paths $\ell \approx 20 - 70$ km in the frequency band 1 - 10 Hz [17], comparable to the thickness H of the Earth's crust. For a shear wave velocity $\beta \approx 3.5$ km/s in the crust this implies a scattering mean free time of only 15 s, much smaller than the observed duration (180 s) of the coda.

A direct and *model-independent* confirmation of the pertinence of multiple scattering is important for two reasons. First, it is important for future studies in extracting information correctly from the seismic coda, i.e to do the inverse problem. Secondly, it would facilitate the application of many powerful mesoscopic tools developed in acoustics and optics [2, 3]. However, several complications arise. One “elementary” test for multiple scattering is the randomization of the propagation direction of the waves [2]. Unfortunately, seismic observations measure local elastic displacements $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, and not “specific intensities”, i.e. angularly resolved fluxes, like in optics. Another elementary test would be an observation of the randomization of polarization [5] as indicating multiple scattering, since single scattering should be highly polarized for a polarized source like an earthquake.

The essential problem in seismic studies is that transverse S and longitudinal P waves cannot be separated in a ground displacement at one point. Only recently, Shapiro *et al* [18] presented an approach to separate P from S waves using a small-aperture array. A second complication is the presence of the Earth's free surface that coherently mixes transverse SV waves with longitudinal P waves [19].

In this Letter, observational data of seismic coda are confronted with a *first principle* in multiple scattering to resolve the controversy “single or multiple scattering in the seismic coda?”. We have investigated the principle of *equipartition*, first discussed by Weaver [20, 21] for elastic waves in a solid body, more recently by Papanicolaou *et al* [22] and Turner [23] using a transport equation, and finally for light in liquid crystals [24, 25]. It is based on the fact that multiple scattering tends to homogenize phase space: the spectral energy density around a specified frequency, originally distributed in phase space in a fashion that largely depends on the nature of the source, eventually becomes uniform. Equipartition has the remarkable property to be independent of the unknown fluctuations that cause the scattering. It would imply any energy ratio to become *time-independent*, and *independent* of the magnitude, polarization and distance of the seismic source. In single scattering from a polarized source these energy ratios would vary significantly with time and among different sources.

The total elastic wave energy density is given by [26],

$$W = \frac{\rho}{2} (\partial_t \mathbf{u})^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) (\text{div } \mathbf{u})^2 + \frac{\mu}{2} (\text{curl } \mathbf{u})^2 + I, \quad (4.1)$$

with $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ the local displacement vector, and ρ the mass density. Deep-reflection and surface-wave studies have shown that the Lamé coefficients λ and μ of the strain-stress tensor are roughly constant and equal in the Earth's crust, with fluctuations less than 5 %. The different terms in Eq. (4.1) represent kinetic (K), compressional (P), and shear (S) energy density. The last term (I) is an interference term involving cross-terms of the kind $\partial_i u_j \partial_k u_l$ whose averages vanish except near boundaries. We have chosen to study S/P , $K/(S+P)$ and $I/(S+P)$, and the ratio H^2/V^2 of kinetic energies for elastic displacements in different directions for which no spatial derivatives have to be carried out.

The most direct way to facilitate the evaluation of the three partial derivatives would be to install seismic receivers close to each other and at different depths. However, installing numerous seismic receivers, especially at depth, is extremely expensive. An array of 4 receivers at the corners of a 50 m side square [18] was temporarily set up close to the city of Chilpancingo (Mexico). The high seismic rate in Mexico made it possible to record, during the three months of the experiment, a series of local earthquakes with magnitudes between

4 and 5, and a spread of roughly 300 km in epicentral distance. The sensors are CMG-40T seismometers connected to Reftek digitizers, whose absolute time was provided by GPS satellites. The 3 vertical derivatives $\partial_z u_i$ were deduced from the measured two horizontal partial derivatives by imposing the stress free condition $\lambda(\text{div } \mathbf{u})\delta_{iz} + \mu(\partial_i u_z + \partial_z u_i) = 0$ for $i = x, y, z$ at the local Earth surface.

We selected 12 earthquakes that exhibit a pronounced seismic coda in the frequency band 1 – 3 Hz. Figures 4.1 show the observed seismograms of one selected event of magnitude 4.3 at a distance of 35 km. They have been averaged over time windows of $\Delta t = 15$ s. separated by 0.3 s. The first arrivals of S and P waves, as well as the exponential coda at long times can easily be identified. In the regime of seismic coda all ratios fluctuate around a constant value until the signal-to-noise level is reached. The horizontal lines in Figs 4.1c,d locate the time-average. We emphasize that in this regime, the local elastic energy density decays by four orders in magnitude.

We interpret the observed time-independent energy ratios in the Coda as a sign of equipartition. The time-dependent fluctuations around the mean for one event are attributed to the Gaussian fluctuations that ought to be uncorrelated in time and of the order of $1/\sqrt{\Delta t \Delta f/2}$ for a bandwidth Δf . In spite of the large variations of the sources in seismic magnitude and distance, Figure 4.2 shows that the measured energy ratios are roughly the same for all sources. Especially the uncertainties in the ratios of potential energies (Table 1) are small. The non-zero value of $\langle I \rangle$ indicates the presence of mode conversions at the Earth's surface.

We now attempt to understand the observed ratios by assuming that the Coda is an equipartitioned random field. If $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ is the local, time-dependent displacement vector, it can be expanded into the eigenfunctions \mathbf{u}_n of the elastic medium with eigenfrequencies ω_n ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varepsilon_n e^{-i\omega_n t} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}). \quad (4.2)$$

In the presence of disorder, all modes get mixed and the ε_n become time-dependent random variables. For small disorder the eigenfrequencies ω_n are not significantly altered. The simplest way of expressing equipartition is that the average $\langle \varepsilon_n \rangle = 0$ and that $\langle \varepsilon_n \varepsilon_m^* \rangle = \sigma^2(t) \delta_{nm}$. This means that the mode amplitudes are independent random variables with random phase but with *equal* variance [27]. This statement implies an “equipartition” of the elastic energy (4.1) among the different modes. The time-dependence $\sigma^2(t)$ cancels in any energy ratio.

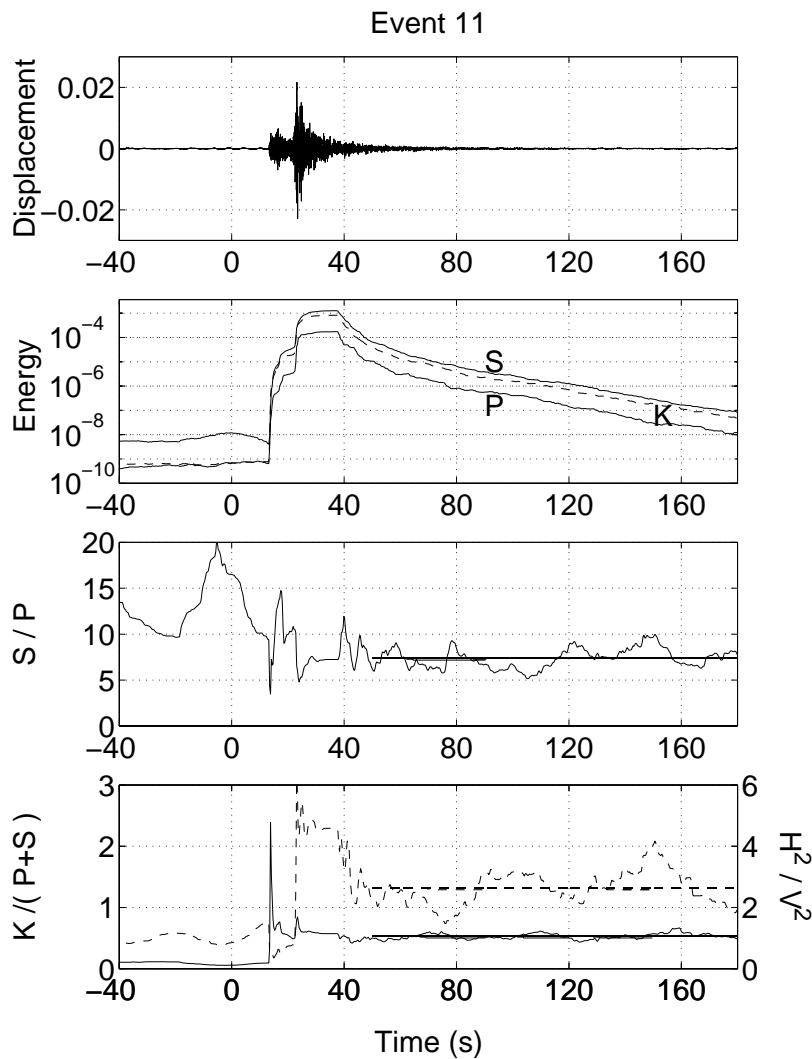


FIG. 4.1 - Observed seismogram, band-passed between 1 and 3 Hz, for event 11 at an epicentral distance of 35 km from the detection array and a magnitude of 4.3. a): Linear plot of the band-passed displacement measured as a function of time. b): Semi-logarithmic plot of the energy density. A distinction is made between kinetic energy (K , dashed), shear energy (S) and compressional energy (P). c). Linear plot of the energy ratio S/P . d). Linear plot of the energy ratios $K/(S+P)$ (solid) and H^2/V^2 (dashed). The horizontal lines denote the estimated time average.

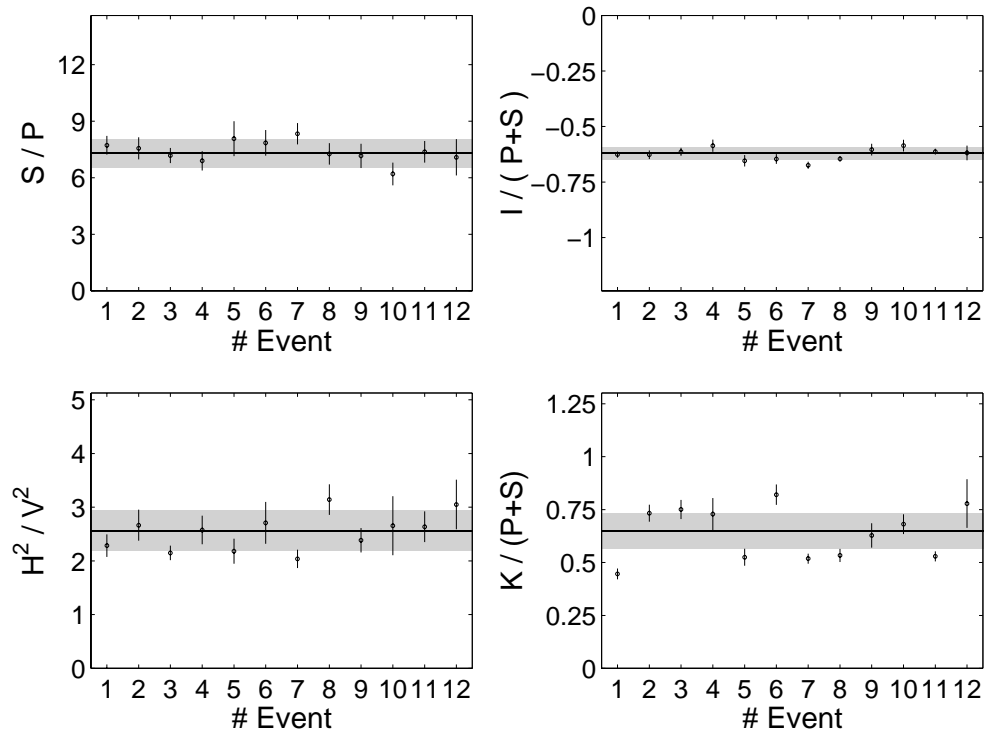


FIG. 4.2 - Observed time-averaged energy ratios S/P (top left), $I/(P + S)$ (top right), H^2/V^2 (bottom left) and $K/(S + P)$ (bottom right) for all 12 events. The shadowed bar denotes the mean value with the standard deviation. The errorbars denote the observed time-dependent fluctuations.

In a homogeneous unbounded medium the modes are plane waves with either S or P polarization. In that case $\langle I \rangle = 0$, $\langle K \rangle / \langle S + P \rangle = 1$ and $\langle S \rangle / \langle P \rangle = 2(\alpha/\beta)^3$ [20, 22, 28], in terms of the P -velocity $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ and the S -velocity $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$, including a factor of 2 to acknowledge the two-fold degeneration of the transverse S waves. This ratio is recognized as the ratio of the density of states (DOS) for both modes. For $\lambda = \mu$ we get $\langle S \rangle / \langle P \rangle = 10.39$. The observed energy ratios do not agree with these quantitative predictions.

A more realistic model should take into account the mode-conversions at the Earth's free surface, and at the interface between crust and mantle (the Moho) at roughly 30 km depth. The equipartition process within a distance of a few shear wavelengths ($\lambda_s \approx 2$ km) from the surface is dominated by the first. We have calculated the exact elastic eigenmodes of a homogeneous plate, bounded by two free surfaces [27, 29]. For a thickness $H > 10\lambda_s$, the equipartition values near the surface, calculated from Eq. (4.2), are independent of H , with surface values that agreed with previous work for the elastic half-space [27]. Figure 4.3 shows how the ratios $\langle S \rangle / \langle P \rangle$ and $\langle K \rangle / \langle P + S \rangle$ depend on depth if equipartition between all modes is assumed. The oscillations in Fig. 4.3, associated with the *local* density of states (LDOS) near the boundary, are well known in optics [30, 31]. Our present study has access to the surface values only (Table 1). The agreement between model and observations is remarkable. Table 1 also shows the theoretical values when either only surface waves or only bulk waves are considered. In both cases they fall outside the estimated error bar of the observational values. This leads to a picture of the coda consisting of an equipartitioned mixture of both Rayleigh and bulk waves, which is expected when the absorption time of Rayleigh waves exceeds the time to mode-convert into bulk waves.

The observed value $H^2/V^2 \approx 2.5$ agrees less well (Table 1). One possible source of discrepancy could be the presence of a “true” effective surface different from both the local geographical free surface and the local surface of the Earth, due to fluctuations in the slope of the Earth surface. To investigate this option, the full kinetic co-variance tensor $\langle \frac{1}{2}\rho\partial_t u_i \partial_t u_j \rangle / \langle K \rangle$ was calculated from the data. Its off-diagonal elements are less than $5\% \pm 5\%$, i.e. consistent with zero and thus with our equipartition model. However, the observed eigenvalues $\langle X^2 \rangle : \langle Y^2 \rangle : \langle Z^2 \rangle = 0.27 : 0.45 : 0.28$ (Y is north) disagree with the theoretical diagonal elements $\langle X^2 \rangle : \langle Y^2 \rangle : \langle Z^2 \rangle = 0.32 : 0.32 : 0.36$. No frame can be found that makes the entire co-variance matrix consistent with our equipartition model. Some other source of discrepancy must exist.

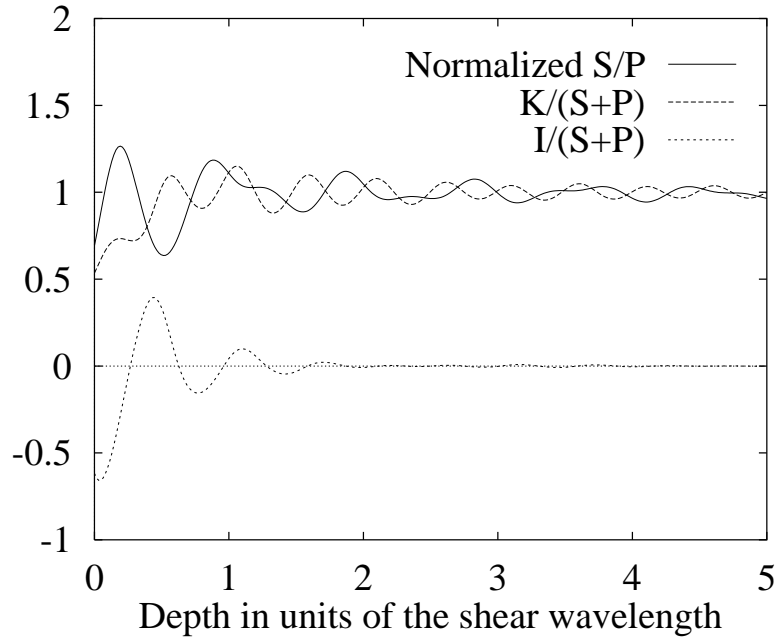


FIG. 4.3 - Theoretical prediction for the depth dependence of the average energy ratios S/P (normalized to bulk value), $K/(P + S)$ and $I/(P + S)$, assuming that $\lambda = \mu$.

energy ratio	DATA	THEORY		THEORY	THEORY
		$z = 0$	$z = \infty$	Rayleigh only	Bulk only
	$z = 0$	$z = 0$	$z = \infty$	$z = 0$	$z = 0$
S/P	7.30 ± 0.72	7.19	10.39	6.460	9.76
$K/(S + P)$	0.65 ± 0.08	0.534	1	0.268	1.19
$I/(S + P)$	-0.62 ± 0.03	-0.617	0	-1.464	-0.336
H^2/V^2	2.56 ± 0.36	1.774	2	0.464	4.49
X^2/Y^2	0.60 ± 0.20	1	1	1	1

TAB. 4.1 - Observed averaged energy ratios (in the frequency range 1-3 Hz, with standard deviation) compared to the theory near the free surface, with $\lambda = \mu$ independent of depth. The third column is calculated by considering both bulk and Rayleigh waves. The last columns are calculated by considering only surface Rayleigh waves or only bulk waves.

Alternatively, the discrepancy could be attributed to excess absorption of surface waves. It is readily shown that if the absorption time of a surface wave is less than the time to mode-convert to bulk waves, its contribution to the steady state partition will be diminished. Table 1 shows that a small deficit of Rayleigh waves could bring H^2/V^2 into accord with theory without seriously compromising the others. In addition, an anisotropic absorption of Rayleigh waves might even explain the anomalous value of $X^2/Y^2 = 0.6$. In view of the geographical location of the array, a mountain area stretched in the direction E-W, it is quite possible that the component Y is privileged over the X direction.

In conclusion, we have observed a first principle of multiple scattering - energy equipartition - in seismograms recorded in Mexico. This strongly supports the interpretation of seismic coda as a genuine multiple scattering process, and excludes single scattering as an alternative explanation.

Acknowledgment

This work was supported by the program *Intérieur de la Terre* of the INSU/CNRS, the *Groupement de Recherches 1847 PRIMA*, the Mexican CONACYT project J32308-T and the NSF grant 9988645. We would like to thank R. Maynard, B. Chouet, J. Scales, C. Lacombe, and S.K. Singh for many helpful discussions. We are grateful to E. Guevera, G. Espitia, V. Kostoglodov and J. Pacheco for their help in the set-up of the experiment.

Bibliographie

- [1] G. Papanicolaou. *Wave Propagation in Complex Media*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] POAN Research Group, editor. *New Aspects of Electromagnetic and Acoustic Wave Diffusion*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
- [3] J.P. Fouque, editor. *Wave Diffusion in Complex Media*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [4] A. Yodh et B. Chance. *Phys. Today*, 10:34, 1995.
- [5] M.I. Mishchenko J.W. Hovenier et L.D. Travis, editor. *Light Scattering by Non-Spherical Particles*. Academic, San Diego, 2000.
- [6] P. Sheng Z.Q. Zhang et G. Papanicolaou. Multiple scattering noise in one dimension: Universality through localization length scaling. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1000, 1986.
- [7] B. White P. Sheng et Z.Q. Zhang. Wave localization characteristics in the time domain. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1918, 1987.
- [8] K. Aki. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geoph. Res.*, 74:615, 1969.
- [9] K. Aki et B. Chouet. Origin of coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *J. Geoph. Res.*, 80:3322, 1975.
- [10] H. Sato. Energy propagation including scattering effect: Single isotropic scattering approximation. *J. Phys. Earth*, 25:27, 1977.
- [11] M. Herraiz et A.F. Espinoza. Coda waves: A review. *Pure Appl. Geoph.*, 125:1569, 1987.

- [12] M. Hoshiya. Seismic coda envelope in depth dependent S -wave velocity structure. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 104:15, 1997.
- [13] I. Abubikarov et A. Gusev. Estimation of scattering properties of lithosphere of kamchatka based on Monte-Carlo simulation of record envelope of near earthquake. *Physics of the earth and Planetary Interiors*, 64:52, 1990.
- [14] M. Hoshiya. Simulation of multiple-scattered coda wave excitation based on the energy conservation law. *Phys. Earth. and Planet Inter.*, 67:123, 1991.
- [15] H. Sato. Energy transportation in one and two dimensional scattering media: Analytic solutions of the multiple isotropic scattering model. *Geoph. J. Int.*, 112:141, 1993.
- [16] R.S. Wu et K. Aki. Multiple scattering and energy transfer of seismic waves, separation of scattering effect from intrinsic attenuation: Application of the theory to hindu-kush region. *Pure Appl. Geoph.*, 128:49, 1988.
- [17] L. Margerin M. Campillo N. Shapiro et B. van Tiggelen. Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in mexico. *Geophys. J. Int.*, 138:343, 1999.
- [18] N. Shapiro M. Campillo L. Margerin S. Singh V. Kostoglodov et J. Pacheco. The energy partitioning between P and S waves and the diffusive character of the seismic coda. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90:655, 2000.
- [19] K. Aki et P. Richards. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Academic Press, San Diego, 1975.
- [20] R. Weaver. On diffuse waves in solid media. *J. Acoust. Soc. Am*, 71:1608, 1982.
- [21] R. Weaver. Diffusivity of ultrasound in polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.*, 38:55, 1990.
- [22] G. Papanicolaou L. Ryzhik et L. Keller. Stability of the P to S energy ratio in the diffusive regime. *Bull. Seism. Soc. Am.*, page 1107, 1996.
- [23] J. Turner. Scattering and diffusion of seismic waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88:276, 1998.

- [24] B.A. van Tiggelen R. Maynard et A. Heiderich. Anisotropic light diffusion in oriented nematic liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 77:639, 1996.
- [25] H. Stark et T.C. Lubensky. Multiple light scattering in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2229, 1996.
- [26] P.M. Morse et H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [27] R.L. Weaver. Diffuse elastic waves at the free surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78:131, 1985.
- [28] L. Margerin M. Campillo et B. van Tiggelen. Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves. *Geoph. Res.*, 105(B4):7873, 2000.
- [29] R.L. Weaver. Diffuse waves in finite plates. *J. Sound and Vib.*, 94:319, 1984.
- [30] H. Khosravi and R. Loudon. *Proc. R. Soc. London A*, 433:337, 1991.
- [31] E. Snoeks A. Lagendijk et A. Polman. Measuring and modifying the spontaneous emission rate of Erbium near an interface. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2459, 1995.

Chapitre 5

Bilan et perspectives

Au cours de cette deuxième partie, nous avons étudié la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre. Nous avons développé l'étude du modèle proposé par Margerin *et al*, dans lequel la coda des sismogrammes est le reflet d'ondes multiples diffusées dans une croûte hétérogène et faiblement absorbante, le manteau étant représenté par un milieu homogène. Dans ce modèle, la fuite des ondes sismiques dans le manteau permet de décrire quantitativement les caractéristiques de la coda. Nous avons porté une attention particulière aux couplages entre les différents modes de vibration (ondes S , ondes P , ondes de Rayleigh) engendrés par les réflexions aux interfaces et par les diffusions. Les conversions de modes sont un objet central de l'étude de la propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène car elles sont responsables de l'équipartition des modes en régime de diffusions multiples.

Dans un premier temps nous avons développé une équation de diffusion généralisée de l'équation du transfert radiatif des ondes élastiques. Cette équation nous a permis de décrire l'évolution spatio-temporelle de E_s et E_p séparément. Elle est valable dans la limite où l'épaisseur de la croûte est supérieure au libre parcours moyen ($\lambda_{s,p} \ll l_{s,p}^* < H$) et lorsque les temps de propagation sont longs devant le temps libre parcours moyen. Ceci nous a permis d'étudier le temps nécessaire pour être dans le régime de l'équipartition des modes, d'évaluer l'influence des conditions aux limites et de l'absorption sur le rapport d'équipartition E_s/E_p et de calculer le facteur de qualité Q_c . Nous avons montré que la présence d'une surface libre n'influait pas le rapport E_s/E_p obtenu pour un milieu infini et qu'une faible absorption diminuait le rapport E_s/E_p lorsque les ondes S étaient plus fortement absorbées que les ondes P .

D'autre part, nous avons développé une équation du transfert radiatif dans le régime où la croûte est faiblement hétérogène ($I_{s,p}^* > H$). Dans l'état actuel cette équation ne prend pas en compte la fuite des ondes dans le manteau. La démarche a été de considérer non pas les ondes planes S et P mais la base des modes propres de vibration d'une plaque. Ceci nous a permis d'incorporer rigoureusement les effets d'interférences aux interfaces et donc de modéliser correctement les mesures en champ proche. Nous avons présenté une approximation de diffusion de cette équation du transfert radiatif qui nous a permis de calculer la valeur du rapport d'équipartition E_s/E_p en tenant compte des ondes de Rayleigh. Le rapport d'équipartition n'est pas de 10,4 comme pour un milieu infini mais de 7,19. Nous avons aussi présenté la théorie du cône de rétrodiffusion cohérente lorsque la mesure s'effectue à la surface libre. Nous avons étudié plusieurs types de sources sismiques (explosion, monopôle, dipôle, quadrupôle), et montré que la symétrie entre la source et le détecteur est primordiale pour obtenir un facteur d'amplification de 2. La largeur caractéristique du cône de rétrodiffusion cohérente est donnée par les longueurs d'ondes λ_s et λ_p . De plus, dès que la source est à plus d'une longueur d'onde de profondeur, le facteur d'amplification devient très faible.

Enfin nous avons présenté une comparaison entre des mesures d'équipartition de l'énergie dans la coda de douze tremblements de terre locaux et les résultats théoriques prenant en compte les effets de la surface libre. Les mesures ont été effectuées au Mexique en 1998 par N. Shapiro *et al.* Elles montrent une stabilisation très nette des rapports énergétiques dans la coda. La comparaison avec les prédictions théoriques est très bonne, ce qui nous amène à conclure qu'au Mexique la coda est probablement formée d'ondes équipartitionnées, ce qui est caractéristique du régime de la diffusion multiple.

Perspective

La dérivation de l'équation du transfert radiatif que nous avons donnée au chapitre 3 n'est qu'une première étape. La deuxième étape consiste à prendre en compte la fuite des ondes dans le manteau et par là de donner une description plus rigoureuse de la décroissance énergétique de la coda. Une question ouverte est de savoir s'il y aura une équipartition des modes de vibration. La réponse à cette question n'est pas simple car il y a plusieurs mécanismes qui entrent en jeu. D'un côté, nous avons les modes guidés et de l'autre côté des modes de fuite qui ont un temps de vie fini. Ces deux classes de modes sont couplées par diffusion sur les hétérogénéités de la croûte. Le coeur du problème est de savoir si le couplage entre ces deux types de modes est fort ou faible. Si le couplage

est faible, nous pouvons alors très bien imaginer qu'il existe une équipartition parmi les modes guidés. Les valeurs des rapports énergétiques seront probablement différentes de ce que nous avons observé au Mexique. Dans ce régime, la décroissance temporelle de la coda serait probablement donnée par le temps de conversion entre les modes guidés et les modes de fuite et dépendrait donc de la nature du désordre présent dans la croûte. A l'inverse, on peut penser que si le couplage entre les modes est fort, l'équipartition des modes guidés n'aura pas le temps de se faire et qu'il n'y aura pas de stabilisation des rapports énergétiques. Dans ce cas, le facteur de qualité Q_c serait donné par les temps de vie des modes de fuite et serait indépendant du désordre. Nous pourrions alors avoir une théorie exacte de Q_c qui ne dépendrait que de l'épaisseur de la croûte H et des vitesses et densités dans la croûte et le manteau. Tous ces paramètres sont bien connus. Nous pouvons penser que seule une simulation Monte-Carlo de l'équation du transfert radiatif permettra de répondre à ces questions.

Un autre développement très intéressant de l'équipartition des modes a été proposé par le Professeur R. Weaver de l'université d'Urbana-Champaign aux États-Unis. Pour une cavité chaotique, il a montré que la fonction de corrélation du champ de déplacement donnait accès à la fonction de Green du système. Il serait très intéressant de savoir si une propriété similaire se retrouve dans un système hétérogène tel que la croûte terrestre. La difficulté est liée à la fuite de l'énergie dans le manteau qui fait de la croûte un système ouvert. De plus, les sources sismiques sont un point épineux car elles ne sont ni contrôlables ni prévisibles. Un axe de recherche possible serait de considérer le bruit sismique ambiant comme une source. Il serait peut être possible de faire de l'imagerie sismique en mesurant la fonction de corrélation du bruit!

Titre de l'ouvrage :

Approche mésoscopique des ondes en milieu complexe : des micro-ondes aux ondes sismiques

Auteur :

Nicolas TRÉGOURÈS

Établissement :

Laboratoire de Physique et de Modélisation des Milieux condensés

Résumé : Ce travail de thèse est composé de deux parties. La première partie, intitulée “Transport de la lumière à travers un milieu hétérogène”, étend l’analyse, bien connue dans le cas d’une onde scalaire, des coefficients de transmission et des corrélations de l’intensité transmise $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ à travers un milieu mésoscopique faiblement désordonné au cas d’une onde électromagnétique. Le résultat essentiel de cette partie est de montrer que la polarisation ajoute à la décroissance angulaire de la fonction de corrélation des règles de sélection très simples. Ces règles de sélection donnent la possibilité de mesurer séparément les termes $C^{(2)}$ et surtout $C^{(3)}$. Nous montrons qu’il y a un très bon accord entre les prédictions théoriques et des mesures expérimentales préliminaires effectuées par le groupe de A. Genack du Queens College de New York. La deuxième partie, intitulée “La mésoscopie des ondes sismiques”, étudie l’influence sur la propagation des ondes sismiques du désordre présent dans la croûte terrestre. Le point central étant le problème de l’équipartition de l’énergie qui stipule que le rapport de l’énergie des ondes de cisaillement (ondes S) et de l’énergie des ondes de compression (ondes P) se stabilise en régime de diffusion multiple à une valeur indépendante des hétérogénéités ainsi que de la nature de la source sismique. Dans un premier temps nous étudions l’équipartition pour une croûte supposée très diffusante, puis nous nous intéressons au cas d’une croûte moins diffusante au point de supporter des modes guidés. Ceci nous amène à introduire une équation du transfert radiatif entre les modes propres de la croûte. Finalement nous donnons une comparaison très encourageante entre des valeurs expérimentales d’équipartition réalisées au Mexique et les résultats théoriques.

Mots clés : Mésoscopie, fluctuations universelles, polarisation, diffusion multiple, sismologie, élasticité, coda, équipartition.

Summary : This thesis is made of two parts. The first part, called “Transport de la lumière à travers un milieu hétérogène”, extends the well-known theory of transmissions coefficient and correlation functions $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ of scalar waves through a weakly disordered medium to the case of electromagnetic waves. The main result is to show that polarisation adds very simple and universal selection rules to the angular dependence of the correlation functions. These selection rules facilitate a new way to measure the terms $C^{(2)}$ and especially $C^{(3)}$. We show that our theoretical predictions are in very good agreement with preliminary results from the group of A. Genack from Queens College in New York. The second part, named “La mésoscopie des ondes sismiques”, deals with the effect of crustal disorder on seismic wave propagation. The central interest of this part is the so-called energy equipartition which states that the ratio of shear (S waves) to compressional (P waves) energy becomes, in the multiple scattering regime, a constant independent of both the nature of the disorder and the seismic source. First, we focus on the case of a strongly disordered crust, next we treat a more weakly disordered crust which can be described in terms of its eigen modes. This gives rise to a radiative transfer equation in which the crustal eigen modes are coupled through the disorder. Finally we show a very encouraging comparison between the energy equipartition ratio measured in Mexico and the theoretical results.

Key words : Mesoscopics, universal fluctuations, polarization, multiple scattering, seismology, elasticity, coda, equipartition.